

SKRIPSI

BAYESIAN *CHAIN LADDER* UNTUK PERHITUNGAN
CADANGAN IBNR DENGAN ASUMSI *HALF-NORMAL* DAN
LOG-NORMAL



JERREMY JOELNATHAN STEVANLIM

NPM: 6162001191

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2024

FINAL PROJECT

**BAYESIAN CHAIN LADDER FOR IBNR RESERVE
CALCULATION UNDER HALF-NORMAL AND LOG-NORMAL
ASSUMPTIONS**



JERREMY JOELNATHAN STEVANLIM

NPM: 6162001191

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2024**

LEMBAR PENGESAHAN

BAYESIAN *CHAIN LADDER* UNTUK PERHITUNGAN CADANGAN IBNR DENGAN ASUMSI *HALF-NORMAL* DAN LOG-NORMAL

Jerremy Joelnathan Stevanlim

NPM: 6162001191

Telah lulus ujian skripsi pada 25 Juni 2024 dengan penguji:
Maria Anestasia, M.Si., M.Act.Sc. dan Dr. Erwinna Chendra

Bandung, 9 Juli 2024

Menyetujui,

Pembimbing



Rizky Reza Fauzi, D.Phil.Math.

Mengetahui,

Ketua Program Studi



Jonathan Hoseana, Ph.D.

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi dengan judul:

BAYESIAN *CHAIN LADDER* UNTUK PERHITUNGAN CADANGAN IBNR DENGAN ASUMSI *HALF-NORMAL* DAN *LOG-NORMAL*

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 9 Juli 2024



Jeremy Joelnathan Stevanlim
NPM: 6162001191

ABSTRAK

Dalam menjalankan bisnisnya, perusahaan asuransi harus mampu memitigasi risiko dan menjaga stabilitas keuangan perusahaan dengan menyiapkan sejumlah cadangan dana yang cukup untuk melakukan pembayaran klaim di masa depan. Terdapat beberapa jenis cadangan dana, salah satunya cadangan dana *Incurred but Not Reported* (IBNR), yang merupakan cadangan dana untuk klaim yang tidak dapat diselesaikan dalam tahun kalender yang sama. Pada penelitian ini, cadangan IBNR diestimasi menggunakan metode Bayesian *Chain Ladder* dengan asumsi distribusi *half-normal* dan log-normal. Penelitian ini menunjukkan bahwa metode Bayesian *Chain Ladder* dengan asumsi distribusi *half-normal*, memiliki hasil taksiran IBNR yang lebih kecil dibandingkan dengan metode Mack *Chain Ladder*. Sedangkan, untuk metode Bayesian *Chain Ladder* dengan asumsi distribusi log-normal, hasil taksirannya lebih besar dibandingkan dengan metode Mack *Chain Ladder*. Dapat disimpulkan bahwa hasil taksiran IBNR mengikuti sifat ketipisan atau ketebalan ekor dari asumsi distribusinya, di mana distribusi *half-normal* merupakan distribusi yang berekor tipis, sedangkan distribusi log normal berekor tebal. Dengan demikian, pemilihan asumsi distribusi yang tepat dapat mencegah kelebihan atau kekurangan pencadangan dana yang menyebabkan kerugian untuk perusahaan. Penelitian ini dapat dikembangkan lagi dengan memilih metode penentuan *hyperparameter* yang lebih matematis, seperti Bayesian nonparametrik atau Bayesian hierarki.

Kata-kata kunci: distribusi *half-normal*; distribusi log-normal; *compulsory third party*; cadangan IBNR; Bayesian *Chain Ladder*; klaim.

ABSTRACT

In running their business, insurance companies must effectively mitigate risks and maintain financial stability by preparing adequate reserves to cover future claim payments. There are several types of reserve funds, one of which is the Incurred but Not Reported (IBNR) reserve, which is a reserve for claims that cannot be settled within the same calendar year. In this thesis, IBNR reserves were estimated using the Bayesian Chain Ladder method under the half-normal and log-normal distributions. The study finds that the Bayesian Chain Ladder method under the half-normal distribution assumption results a smaller IBNR estimate compared to the Mack Chain Ladder method. Conversely, the Bayesian Chain Ladder method with the log-normal distribution assumption results in a larger estimate compared to the Mack Chain Ladder method. Therefore, it can be concluded that the IBNR estimate follows the tail thickness properties of the assumed distribution, where the half-normal distribution has a light tail, while the log-normal distribution has a heavy tail. Thus, selecting the fitting distribution assumption can prevent over- or under-reserving, which can lead to financial losses for the company. This research can be further developed by choosing a more mathematical approach to determining hyperparameters, such as Bayesian nonparametrics or Bayesian hierarchies.

Keywords: half-normal distribution; log-normal distribution; compulsory third party; IBNR reserve; Bayesian Chain Ladder; claim.

Stay Hungry, Stay Foolish



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis nyatakan pada Tuhan Yesus Kristus yang karena kasih karunia-Nya penulis diizinkan dan dimampukan untuk dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Bayesian Chain Ladder untuk Perhitungan Cadangan IBNR dengan Asumsi Half-Normal dan Log-Normal**”. Selain itu, penulis juga menyadari bahwa tanpa adanya dukungan dan bantuan dari orang-orang yang luar biasa, masa perkuliahan dan penyusunan skripsi ini tidak akan berjalan sebaik ini. Oleh karena itu, izinkan penulis untuk mengungkapkan rasa terima kasih yang tulus kepada:

1. Papa dan nenek penulis, Julianto dan The Kong Ing, atas doa dan cinta kasih yang tiada hentinya kepada penulis. Terima kasih karena telah berjuang untuk membiayai penulis selama masa perkuliahan. Terima kasih juga karena selalu menerima dan percaya kepada penulis, meskipun penulis kerap kali mengecewakan. Juga kepada kedua tante dan adik penulis, Indah, Kurniawati, dan Jevanya, yang telah memberi perhatian dan dukungan kepada penulis selama masa perkuliahan. Semoga kasih Tuhan yang melampaui segala akal menyertai kehidupan kalian sampai selama-lamanya.
2. Bapak Rizky Reza Fauzi, D.Phil.Math. selaku dosen pembimbing yang penulis idolakan dan telah menjadi *role-model* bagi penulis. Jika waktu dapat diputar kembali, kesempatan untuk dibimbing oleh Bapak merupakan kesempatan yang akan saya ambil berulang kali tanpa ragu. Tiada kata yang dapat penulis rangkai untuk bisa menggambarkan rasa terima kasih penulis terhadap Bapak atas semua waktu, wawasan, dan dedikasi yang penulis terima. Terima kasih telah menjadi dosen yang dengan tulus ingin berbagi ilmu kepada mahasiswanya, tanpa Bapak, cara penulis memandang Matematika tidaklah seindah ini. Semoga Bapak selalu menginspirasi banyak orang di dalam setiap perjalanan hidup Bapak, dan menunjukkan bahwa dari setiap tantangan lahir keindahan dan kebebasan sejati.
3. Ibu Maria Anastasia, M.Si., M.Act.Sc. dan Dr. Erwinna Chendra selaku dosen penguji yang telah bersedia untuk membantu melengkapi skripsi ini menjadi lebih baik lagi. Terima kasih karena telah meluangkan waktunya dan memberikan kritik yang berarti kepada penulis.
4. Gabrielle Aretha Setiady selaku kekasih penulis yang selalu menemani penulis di dalam kondisi terbaik maupun terburuk, menjadi tempat untuk bercerita, dan senantiasa menunjukkan dukungan kepada penulis. Terima kasih telah menjadi bagian yang indah dalam hidup penulis. *Cheers to our journey ahead.*
5. Cielbert sebagai sahabat penulis sejak hari pertama perkuliahan dan teman dalam mencoba banyak hal baru. Terima kasih telah menjadi teman yang dapat dipercaya dan diandalkan.
6. Karel Dwinugroho Bowosebua sebagai sahabat penulis dan juga teman seperbimbingan yang selalu membantu sama lain dalam kesusahan. Terima kasih telah menjadi orang yang sangat *helpful* dan *thoughtful*.
7. Teman-teman Matematika UNPAR angkatan 2020, khususnya “Jgn Gt” yang selalu menemani penulis selama masa perkuliahan, belajar bersama, bersusah bersama, dan menjadi punggung untuk satu sama lain.

8. Seluruh dosen dan staf Matematika UNPAR yang luar biasa. Terima kasih atas ilmu dan semangatnya dalam mengajar. Penulis banyak belajar hal-hal baru dari Bapak dan Ibu. Semoga semangat mengajar Bapak dan Ibu tidak pernah luntur dan selalu dilimpahkan kesabaran, kebijaksanaan, dan kebaikan meliputi setiap karya-karya Bapak dan Ibu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga segala kritik dan saran yang konstruktif dari pembaca akan diterima dengan tangan terbuka oleh penulis agar skripsi ini menjadi lebih baik. Akhir kata, penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan dapat dikembangkan menjadi lebih baik.

Bandung, 9 Juli 2024

Penulis



DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 <i>State of the Art</i>	2
1.5 Sistematika Pembahasan	3
2 LANDASAN TEORI	5
2.1 Data <i>Run-Off Triangle</i>	5
2.2 Metode Mack <i>Chain Ladder</i>	6
2.3 Statistika Bayesian	7
2.3.1 Teorema Bayes	7
2.3.2 Inferensi Bayesian	8
2.3.3 Fungsi Kerugian Kuadratik	9
2.4 Keluarga Distribusi Normal	9
2.4.1 Distribusi Normal	9
2.4.2 Distribusi <i>Half-Normal</i>	11
2.4.3 Distribusi Log-Normal	13
2.4.4 Distribusi <i>Truncated Normal</i>	15
2.5 Keluarga Distribusi Gamma	17
2.5.1 Distribusi Gamma	17
2.5.2 Distribusi Invers-Gamma	19
3 BAYESIAN <i>Chain Ladder</i> DENGAN ASUMSI <i>Half-Normal</i>	21
3.1 Asumsi Bayesian <i>Chain Ladder</i> untuk <i>Half-Normal</i>	21
3.2 <i>Development Factor</i> Bayesian untuk <i>Half-Normal</i>	22
3.3 Hasil Prediksi IBNR untuk Bayesian <i>Chain Ladder</i> dengan Asumsi <i>Half-Normal</i>	23
3.4 Demonstrasi BIT untuk <i>Run-Off Triangle Half-Normal</i>	28
4 BAYESIAN <i>Chain Ladder</i> DENGAN ASUMSI LOG-NORMAL	30
4.1 Asumsi Bayesian <i>Chain Ladder</i> untuk <i>Log-Normal</i>	30
4.2 <i>Development Factor</i> Bayesian untuk <i>Log-Normal</i>	31
4.3 Hasil Prediksi IBNR untuk Bayesian <i>Chain Ladder</i> dengan Asumsi Log-Normal	34
4.4 Demonstrasi BIT untuk <i>Run-Off Triangle Log-Normal</i>	36
5 KESIMPULAN DAN SARAN	39

5.1 Kesimpulan	39
5.2 Saran	40
DAFTAR REFERENSI	41



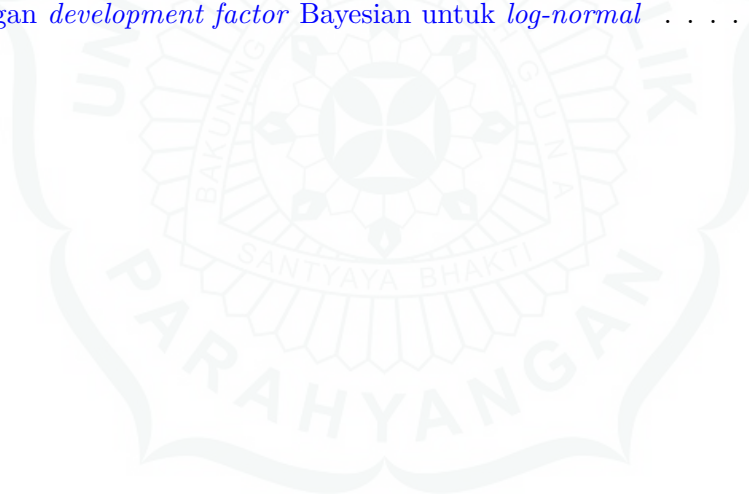
DAFTAR GAMBAR

2.1	Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi normal	11
2.2	Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi <i>half-normal</i> dengan ω berbeda	13
2.3	Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi log-normal	15
2.4	Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi <i>truncated</i> normal	17
2.5	Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi gamma	19
2.6	Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi invers-gamma	20
3.1	Contoh tampilan awal program	28
3.2	Contoh masukan data <i>run-off triangle half-normal</i> inkremental	29
3.3	Contoh hasil perhitungan menggunakan program dengan asumsi <i>half-normal</i>	29
4.1	Grafik perbandingan nilai <i>outstanding claims</i> untuk log-normal	36
4.2	Contoh tampilan seksi log-normal	37
4.3	Contoh masukan data <i>run-off triangle</i> log-normal kumulatif	38
4.4	Contoh hasil perhitungan menggunakan program dengan asumsi log-normal	38



DAFTAR TABEL

2.1	Data <i>run-off triangle</i> inkremental	5
2.2	Data <i>run-off triangle</i> kumulatif	6
3.1	Data klaim inkremental asuransi CTP (dalam jutaan dolar Australia)	24
3.2	Data klaim kumulatif asuransi CTP (dalam jutaan dolar Australia)	24
3.3	Perbandingan <i>development factor</i> Bayesian untuk <i>half-normal</i>	26
3.4	Data <i>run-off triangle</i> untuk Bayesian <i>Chain Ladder</i> (BCL) dengan asumsi <i>half-normal</i>	26
3.5	Data <i>run-off triangle</i> untuk Mack <i>Chain Ladder</i> (MCL) <i>mean</i>	27
3.6	Data <i>run-off triangle</i> untuk Mack <i>Chain Ladder</i> (MCL) <i>average</i>	27
3.7	Perbandingan <i>outstanding claims</i> untuk <i>half-normal</i>	27
4.1	Data log klaim kumulatif asuransi CTP (dalam jutaan dolar Australia)	34
4.2	Data <i>run-off triangle</i> log klaim kumulatif untuk Bayesian <i>Chain Ladder</i> (BCL) log-normal	36
4.3	Data <i>run-off triangle</i> klaim kumulatif untuk Bayesian <i>Chain Ladder</i> (BCL) log-normal	36
4.4	Perbandingan <i>development factor</i> Bayesian untuk <i>log-normal</i>	37



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Asuransi adalah mekanisme pengalihan risiko dari individu atau organisasi kepada perusahaan asuransi yang dapat mengurangi dampak kerugian finansial dari kejadian yang tidak diinginkan, seperti kecelakaan, penyakit, kematian, atau kerusakan properti.¹ Dalam menjalankan bisnisnya, perusahaan asuransi harus mampu memitigasi risiko dan menjaga stabilitas keuangan perusahaan dengan menyiapkan sejumlah cadangan dana yang cukup untuk melakukan pembayaran klaim di masa depan. Berdasarkan kegunaannya, cadangan dana dibagi menjadi dua jenis, yaitu *immediate reserve* dan *outstanding claim reserve*. *Immediate reserve* merupakan cadangan dana yang disiapkan untuk klaim yang dapat diselesaikan dengan waktu yang relatif singkat, sedangkan *outstanding claim reserve* merupakan cadangan dana untuk klaim yang tidak dapat diselesaikan dalam tahun kalender yang sama. *Outstanding claim reserve* juga terdiri dari beberapa jenis, dua di antaranya adalah *Incurred but Not Reported* (IBNR) dan *Reported but Not Settled* (RBNS). Sesuai dengan namanya, *Incurred but Not Reported* adalah klaim yang telah terjadi tetapi belum dilaporkan kepada perusahaan asuransi, sedangkan *Reported but Not Settled* adalah klaim yang telah diajukan dan diterima oleh perusahaan asuransi tetapi pembayarannya belum diselesaikan. Dari beberapa jenis cadangan dana tersebut, pembahasan lebih lanjut dilakukan pada cadangan dana jenis IBNR.

Cadangan IBNR merupakan jenis cadangan dana yang sangat penting untuk dimiliki oleh suatu perusahaan asuransi. Selain sebagai pemenuhan persyaratan yang telah ditetapkan oleh regulator, cadangan IBNR membantu perusahaan mengantisipasi dan mempersiapkan diri untuk klaim besar yang mungkin terjadi di masa depan.² Pada tahun 2006, terdapat peristiwa kebangkrutan pada salah satu perusahaan asuransi di Dallas, Texas, Amerika Serikat, yaitu Home State County Mutual Insurance Company. Kebangkrutan ini disebabkan oleh beberapa faktor, yang salah satunya adalah kegagalan perusahaan asuransi Home State dalam mencadangkan dana IBNR yang cukup. Perusahaan asuransi Home State mencadangkan dana IBNR untuk tahun 2006 sebesar 15 juta dolar AS, sementara realisasi klaim IBNR sebesar 25 juta dolar AS. Kerugian sebesar 10 juta dolar AS tersebut tentunya berdampak buruk terhadap kondisi finansial perusahaan. Selain itu, pada tahun 2004 dan 2005, perusahaan tersebut juga mengalami kerugian sebesar 2 dan 3 juta dolar AS akibat pencadangan dana IBNR yang kurang tepat.³ Oleh karena kerugian terakumulasi yang dialami,

¹<https://www.ojk.go.id/id/kanal/iknb/Pages/Asuransi.aspx> (Diakses pada 26 Juni 2024)

²<https://ojk.go.id/id/kanal/syariah/regulasi/peraturan-pasar-modal-syariah/Pages/POJK-Nomor-18POJK042015-Penerbitan-Persyaratan-Sukuk.aspx> (Diakses pada 27 Juni 2024)

³https://content.naic.org/cis_refined_results.htm?TABLEAU=CIS_FINANCIAL&COCODE=29297&:refresh (Diakses pada 27 Juni 2024)

perusahaan asuransi Home State dinyatakan bangkrut pada tahun 2006. Melalui peristiwa ini, jelas bahwa pencadangan dana IBNR yang tepat berperan vital dalam kelangsungan bisnis perusahaan.

Salah satu cara paling sederhana dan paling umum dalam menaksir cadangan IBNR adalah dengan menggunakan metode Mack *Chain Ladder*, yang mana data klaim biasanya disajikan dalam bentuk *run-off triangle* dan memanfaatkan agen penundaan (*development factor*) untuk menaksir cadangan IBNR [1]. Akan tetapi, kelemahan dari metode Mack *Chain Ladder* adalah metode yang bersifat deterministik. Dari permasalahan tersebut, pada penelitian ini dikembangkan metode statistika Bayesian *Chain Ladder* yang memanfaatkan distribusi *half-normal* dan log-normal [2]. Pendekatan Bayesian dipilih karena pendekatan ini menawarkan beberapa kelebihan dibandingkan pendekatan frekuentis. Salah satu kelebihannya, pendekatan Bayesian mengizinkan pembaharuan hasil prediksi ketika adanya penambahan informasi pada data observasi. Lebih dari itu, jika pengukuran *error* dilakukan secara frekuentis, seperti *mean squared error*, maka *error* yang dihasilkan oleh penaksir Bayesian cenderung lebih baik dibandingkan dengan penaksir frekuentis [3].

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana mengonstruksi *development factor* Bayesian jika data *run-off triangle* diasumsikan berdistribusi *half-normal*?
2. Bagaimana mengonstruksi *development factor* Bayesian jika data *run-off triangle* diasumsikan berdistribusi log-normal?
3. Bagaimana hasil perhitungan cadangan IBNR secara Bayesian dengan menggunakan distribusi *half-normal* dan log-normal jika dibandingkan dengan metode Mack *Chain Ladder*?

1.3 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengonstruksi *development factor* Bayesian jika data *run-off triangle* diasumsikan berdistribusi *half-normal*.
2. Mengonstruksi *development factor* Bayesian jika data *run-off triangle* diasumsikan berdistribusi log-normal.
3. Membandingkan dan menganalisis hasil perhitungan cadangan IBNR secara Bayesian dengan menggunakan distribusi *half-normal* dan log-normal, serta perbandingannya dengan metode Mack *Chain Ladder*.

1.4 *State of the Art*

Sekalipun metode Mack *Chain Ladder* merupakan salah satu metode penaksiran cadangan IBNR paling umum dan sering digunakan karena kesederhanaannya, tetapi metode ini merupakan metode yang bersifat deterministik, di mana keacakan dari data tidak turut dipertimbangkan dalam

penaksiran [4]. Oleh karena itu, statistika Bayesian yang memanfaatkan distribusi gamma diterapkan pada metode Mack *Chain Ladder*, sehingga keacakan dari parameternya turut dipertimbangkan [5].

Penggunaan distribusi gamma tersebut dinilai kurang cocok untuk beberapa jenis data dikarenakan ekornya yang sekalipun tipis, tetapi tidak setipis distribusi normal. Jadi, data-data IBNR yang memiliki ekor sangat tipis atau sangat tebal tidak cocok menggunakan distribusi gamma [6]. Oleh karena itu, pada penelitian ini dikembangkan metode Bayesian *Chain Ladder* dengan memanfaatkan distribusi *half-normal* dan log-normal [2]. Distribusi *half-normal* memiliki ekor yang lebih tipis dibandingkan distribusi gamma disebabkan sifatnya yang serupa dengan distribusi normal. Sebaliknya, distribusi log-normal memiliki ekor yang tebal, sehingga data-data yang tidak cocok dengan distribusi *half-normal* akan ditanggulangi oleh distribusi log-normal [6]. Selain itu, dibangun juga *graphical user interface* (GUI) sederhana yang diberi nama Bayesian IBNR Table (BIT), yang dirancang menggunakan bahasa pemrograman Python. Pembentukan GUI ini dibantu dengan *library* PyQt5, yaitu salah satu modul yang dapat digunakan dalam pemrograman GUI.

1.5 Sistematika Pembahasan

Dalam penelitian ini, sistematika pembahasan dibagi ke dalam lima bab. Pembahasan dimulai dari latar belakang dari penelitian ini, dilanjutkan dengan landasan teori yang akan digunakan untuk menunjang penelitian ini, penerapan metode Bayesian pada metode Mack *Chain Ladder* untuk asumsi *half-normal* dan log-normal, dan ditutup dengan kesimpulan serta saran yang diperoleh dari penelitian ini. Secara lengkap, sistematika pembahasannya dapat dilihat sebagai berikut.

Bab 2: Landasan Teori

Pada bagian ini, terdapat pembahasan teori-teori dasar yang akan digunakan pada penelitian ini. Teori yang dibahas yaitu data *run-off triangle*, metode Mack *Chain Ladder*, statistika Bayesian, keluarga distribusi normal, dan keluarga distribusi gamma.

Bab 3: Bayesian *Chain Ladder* dengan Asumsi *Half-Normal*

Bagian ini membahas tentang penerapan metode Bayesian pada metode Mack *Chain Ladder* dengan asumsi *half-normal* yang diawali dengan memperkenalkan asumsi-asumsi yang akan digunakan. Kemudian, asumsi-asumsi tersebut digunakan sebagai pendukung dalam mengonstruksi *development factor* Bayesian yang pada akhirnya digunakan untuk memprediksi cadangan IBNR.

Bab 4: Bayesian *Chain Ladder* dengan Asumsi Log-Normal

Bagian ini membahas tentang penerapan metode Bayesian pada metode Mack *Chain Ladder* dengan asumsi log-normal yang diawali dengan memperkenalkan asumsi-asumsi yang akan digunakan. Kemudian, asumsi-asumsi tersebut digunakan sebagai pendukung dalam mengonstruksi *development factor* Bayesian yang pada akhirnya digunakan untuk memprediksi cadangan IBNR.

Bab 5: Kesimpulan dan Saran

Sebagai penutup dari penelitian ini, disajikan kesimpulan yang menjawab pertanyaan-pertanyaan yang telah dirumuskan pada Bab 1 dan juga saran pengembangan untuk penelitian selanjutnya.



BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini, terdapat pembahasan teori-teori dasar yang digunakan pada penelitian ini. Teori yang dibahas yaitu data *run-off triangle*, metode Mack *Chain Ladder*, statistika Bayesian, keluarga distribusi normal, dan keluarga distribusi gamma. Subbab 2.1 dan 2.2 membahas mengenai teori dasar perhitungan cadangan IBNR. Subbab 2.3 membahas tentang statistika Bayesian yang nantinya diterapkan ke dalam metode Mack *Chain Ladder*. Subbab 2.4 dan 2.5 membahas tentang sifat matematis dari distribusi-distribusi yang digunakan untuk mengonstruksi *development factor* Bayesian.

2.1 Data Run-Off Triangle

Data *run-off triangle* merupakan data yang menyajikan total klaim pada periode waktu tahun kejadian $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan periode waktu tahun penundaan $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, baik secara inkremental maupun kumulatif. Pada data *run-off triangle* inkremental, didefinisikan $C_{i,j}$ sebagai peubah acak yang menyatakan besarnya klaim pada tahun kejadian i dan diselesaikan pembayarannya pada tahun $i + j$ [7]. Data *run-off triangle* inkremental disajikan seperti pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Data *run-off triangle* inkremental

Tahun Kejadian	Tahun Penundaan					
	0	1	...	j	...	$n-1$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$...	$C_{1,j}$...	$C_{1,n-1}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$...	$C_{2,j}$...	$\hat{C}_{2,n-1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$...	$\hat{C}_{i,j}$...	$\hat{C}_{i,n-1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
n	$C_{n,0}$	$\hat{C}_{n,1}$...	$\hat{C}_{n,j}$...	$\hat{C}_{n,n-1}$

Pada Tabel 2.1, bagian segitiga atas disebut sebagai *development triangle* yang menyatakan klaim yang telah dibayar pada tahun penundaan j untuk kerugian yang terjadi pada tahun i , yang dinotasikan dengan $\mathbf{C} = \{C_{i,j} : 0 < i + j \leq n, 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n - 1\}$. Bagian segitiga bawah pada Tabel 2.1 disebut sebagai *future triangle* yang memuat estimasi pembayaran klaim di masa depan, yang dinotasikan dengan $\mathbf{C}^f = \{\hat{C}_{i,j} : i + j > n, 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n - 1\}$ [5].

Selain data *run-off triangle* inkremental, dapat dibentuk pula *run-off triangle* kumulatif, dengan entrinya adalah $S_{i,j} = \sum_{k=0}^j C_{i,k}$ yang menyatakan besarnya klaim kumulatif pada tahun kejadian i

yang paling lambat dibayarkan pada tahun penundaan j . Data *run-off triangle* kumulatif disajikan seperti pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2: Data *run-off triangle* kumulatif

Tahun Kejadian	Tahun Penundaan					
	0	1	...	j	...	$n-1$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$...	$S_{1,j}$...	$S_{1,n-1}$
2	$S_{2,0}$	$S_{2,1}$...	$S_{2,j}$...	$\hat{S}_{2,n-1}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$...	$\hat{S}_{i,j}$...	$\hat{S}_{i,n-1}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$S_{n,0}$	$\hat{S}_{n,1}$...	$\hat{S}_{n,j}$...	$\hat{S}_{n,n-1}$

Pada Tabel 2.2, sel berwarna biru disebut sebagai *paid-to-date claims* tahun kejadian i yang merupakan jumlah banyaknya besaran klaim yang telah dibayarkan sampai pada tahun kejadian terakhir di *development triangle*, dinotasikan dengan $S_{i,n-i}$. Sel berwarna kuning disebut sebagai cadangan klaim (*reserve claims*) yang merupakan cadangan dana untuk membayar klaim di masa depan [5]. Sel berwarna merah disebut sebagai *ultimate claims* pada tahun kejadian i yang merupakan total kerugian kumulatif yang berasal dari kejadian di tahun ke- i dan akan dibayarkan pada tahun penundaan $n - 1$, dinotasikan dengan $S_{i,n-1}$.

2.2 Metode Mack *Chain Ladder*

Metode Mack *Chain Ladder* merupakan suatu metode deterministik yang digunakan untuk memperkirakan cadangan klaim IBNR di masa mendatang berdasarkan data klaim yang telah terjadi sebelumnya [8]. Metode ini merupakan metode yang paling populer dikarenakan kesederhanaannya dan dapat digunakan tanpa asumsi distribusi apapun [4]. Pada metode ini diasumsikan terdapat faktor penundaan (*development factor*) yang dinotasikan dengan f_j yang memiliki hubungan $S_{i,j} = f_j S_{i,j-1}$ untuk setiap tahun kejadian i . Sebagai catatan, jika dikenakan fungsi logaritma, didapatkan identitas

$$\log S_{i,j} = \log f_j + \log S_{i,j-1}.$$

Nilai dari f_j dapat diestimasi menggunakan berbagai cara, seperti *development factor mean* yang dapat dinyatakan dengan

$$\hat{f}_j^M = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j-1}}, \quad (2.1)$$

serta *development factor average* yang dapat dinyatakan dengan

$$\hat{f}_j^A = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} \frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}}, \quad (2.2)$$

dengan $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Nilai estimasi besaran klaim kumulatif pada tahun kejadian i dan penundaan selama j tahun

dapat diperoleh dengan menggunakan hubungan yang sama, yaitu

$$\hat{S}_{i,j} = \begin{cases} \hat{f}_j \cdot S_{i,j-1}, & j = n - i + 1; \\ \hat{f}_j \cdot \hat{S}_{i,j-1}, & j > n - i + 1, \end{cases} \quad (2.3)$$

dengan $i = 2, \dots, n$ dan $j = n - i + 1, \dots, n - 1$. Selanjutnya, nilai estimasi cadangan *outstanding claim* yang berasal dari tahun kejadian i dapat diperoleh dengan rumus

$$\hat{R}_i = \hat{S}_{i,n} - S_{i,n-i}, \quad (2.4)$$

dan total estimasi cadangan klaim untuk semua tahun kejadian, yang disebut dengan cadangan IBNR, adalah

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i. \quad (2.5)$$

2.3 Statistika Bayesian

Terdapat dua jenis pendekatan filosofis utama dalam statistika, yaitu pendekatan frekuentis (klasik) dan pendekatan Bayesian. Pendekatan frekuentis mengasumsikan bahwa parameter dari suatu populasi adalah bilangan tetap tetapi tidak diketahui nilainya. Sebaliknya, pendekatan Bayesian menganggap parameter dari suatu populasi adalah sesuatu yang acak sehingga tidak diketahui nilainya [3].

Pendekatan Bayesian memanfaatkan asumsi awal (*prior*) yang biasanya bersifat subjektif dan data eksperimen objektif untuk memperoleh informasi baru yang merupakan campuran keduanya (*posterior*). Proses penambahan informasi data eksperimen ke asumsi awal agar menjadi informasi yang baru dapat dilakukan dengan memanfaatkan teorema Bayes [3].

2.3.1 Teorema Bayes

Teorema Bayes merupakan dasar dari statistika Bayesian yang mengizinkan probabilitas dari suatu kejadian dapat diperbaharui ketika terdapat informasi tambahan. Peluang terjadinya kejadian A bersyarat kejadian B dapat diperoleh dengan rumus

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (2.6)$$

Dengan intuisi yang sama, peluang terjadinya kejadian B bersyarat kejadian A dapat diperoleh dengan

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (2.7)$$

Dengan mengalikan $P(A)$ pada kedua sisi persamaan (2.7), diperoleh

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A), \quad (2.8)$$

sehingga hasil substitusi dari persamaan (2.8) ke persamaan (2.6) adalah

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \quad (2.9)$$

yang dikenal sebagai teorema Bayes.

2.3.2 Inferensi Bayesian

Teorema Bayes pada persamaan (2.9) adalah dasar dari inferensi Bayesian. Misal $P(A)$ merupakan suatu dugaan awal (*prior*) tentang nilai parameter tanpa mengetahui informasi dari data B dan $P(B)$ dimisalkan sebagai peluang dari data sampel. Dengan demikian, $P(B|A)$ dapat diartikan sebagai model data yang merupakan peluang hasil sampel untuk setiap dugaan nilai parameter yang mungkin dan $P(A|B)$ dapat diartikan sebagai probabilitas nilai parameter setelah mempertimbangkan data sampel B yang disebut juga dengan *posterior*.

Distribusi *Prior*

Distribusi *prior* menyatakan dugaan awal atau argumen mengenai nilai parameter tanpa mengolah informasi dari data terlebih dahulu, sehingga dikenal sebagai distribusi yang bersifat subjektif. Peubah acak *prior* dan fungsi kepadatan peluangnya (*pdf*) secara berturut-turut dinotasikan sebagai Θ dan π_{Θ} .

Distribusi Model Data

Distribusi model data merupakan distribusi probabilitas bersyarat untuk data sampel, yang dinotasikan sebagai $f_{\mathbf{X}|\Theta}$. Misalkan terdapat data sampel sebanyak n pada suatu periode, yaitu $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, yang bersifat saling bebas dan terdistribusi secara identik (*iid*). Fungsi kepadatan peluang (*pdf*) dari distribusi model data dinyatakan sebagai

$$f_{\mathbf{X}|\Theta}(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i|\Theta}(x_i|\theta).$$

Distribusi *Posterior*

Distribusi *posterior* merupakan distribusi probabilitas bersyarat untuk parameter θ setelah observasi dilakukan, yang dinotasikan sebagai $\pi_{\Theta|\mathbf{X}}$. Distribusi *posterior* dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x}) &= \frac{f_{\mathbf{X}|\Theta}(\mathbf{x}|\theta)\pi_{\Theta}(\theta)}{\int_{\Pi} f_{\mathbf{X}|\Theta}(\mathbf{x}|\theta)\pi_{\Theta}(\theta)d\theta} \\ &\propto f_{\mathbf{X}|\Theta}(\mathbf{x}|\theta)\pi_{\Theta}(\theta). \end{aligned}$$

Distribusi ini menggambarkan subjektivitas sekaligus objektivitas karena menggabungkan distribusi *prior* subjektif dan model data yang bersifat objektif. Perhatikan bahwa ketika distribusi *posterior* berasal dari keluarga distribusi yang sama dengan distribusi *prior*-nya sekalipun mungkin memiliki parameter yang berbeda, distribusi *prior* tersebut disebut sebagai distribusi *conjugate prior*.

2.3.3 Fungsi Kerugian Kuadratik

Penaksiran dalam pendekatan Bayesian selalu didasarkan pada fungsi kerugian tertentu. Fungsi kerugian yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}(\hat{\theta}, \Theta)$ menyatakan jarak antara nilai sebenarnya, yakni θ , dengan hasil taksiran parameter $\hat{\theta}$, yang dapat berpotensi mengakibatkan kerugian karena kesalahan taksiran. Penaksiran Bayesian untuk suatu fungsi kerugian tertentu memiliki peran untuk meminimumkan kerugian *posterior* yang diharapkan. Salah satu fungsi kerugian yang paling terkenal ialah fungsi kerugian kuadratik, yang akan digunakan juga untuk menaksir nilai parameter dalam penelitian ini.

Fungsi kerugian kuadratik didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}(\hat{\theta}, \Theta) = (\hat{\theta} - \Theta)^2,$$

dengan kerugian *posterior* yang diharapkan adalah

$$E(\mathcal{L}(\hat{\theta}, \Theta)|\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 \pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x}) d\theta$$

yang dapat dituliskan kembali sebagai

$$\begin{aligned} E(\mathcal{L}(\hat{\theta}, \Theta)|\mathbf{x}) &= E((\hat{\theta} - \Theta)^2|\mathbf{x}) \\ &= E(\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\Theta + \Theta^2|\mathbf{x}) \\ &= \hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}E(\Theta|\mathbf{x}) + E(\Theta^2|\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Aplikasikan turunan pertama terhadap $\hat{\theta}$ pada kedua sisi persamaan untuk meminimumkan kerugian *posterior* yang diharapkan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\hat{\theta}} E(\mathcal{L}(\hat{\theta}, \Theta)|\mathbf{x}) &= \frac{d}{d\hat{\theta}} (\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}E(\Theta|\mathbf{x}) + E(\Theta^2|\mathbf{x})) \\ \Leftrightarrow 0 &= 2\hat{\theta} - 2E(\Theta|\mathbf{x}) \\ \Leftrightarrow \hat{\theta} &= E(\Theta|\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Dengan demikian, penaksir Bayesian untuk θ dengan fungsi kerugian kuadratik dapat dinyatakan sebagai ekspektasi dari distribusi *posterior*.

2.4 Keluarga Distribusi Normal

Distribusi normal atau yang dikenal juga sebagai distribusi Gaussian merupakan salah satu distribusi probabilitas kontinu yang paling umum digunakan dalam statistika [9]. Dari distribusi normal dapat dibentuk beberapa distribusi lain seperti distribusi *half-normal*, *log-normal*, dan *truncated normal*. Kumpulan distribusi-distribusi yang dibentuk dari distribusi normal disebut sebagai keluarga distribusi normal.

2.4.1 Distribusi Normal

Misal X adalah peubah acak berdistribusi normal dengan parameter rata-rata μ dan variansi σ^2 , yang dapat dinotasikan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka *probability distribution function (pdf)* dari X

adalah

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.10)$$

Kemudian, *moment generating function* (*mgf*) dari X adalah

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(-2tx\sigma^2 + (x-\mu)^2)} dx \\ &= e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-(\mu+t\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dx \right] \\ &= e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}, \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, ekspektasi dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= M'_X(0) \\ &= (\mu + \sigma^2 t) e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \Big|_{t=0} \\ &= \mu. \end{aligned}$$

Sementara itu, momen ke-2 dari X dapat dicari dengan

$$\begin{aligned} E(X^2) &= M''_X(0) \\ &= (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + \sigma^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \Big|_{t=0} \\ &= \mu^2 + \sigma^2, \end{aligned}$$

sehingga variansinya adalah

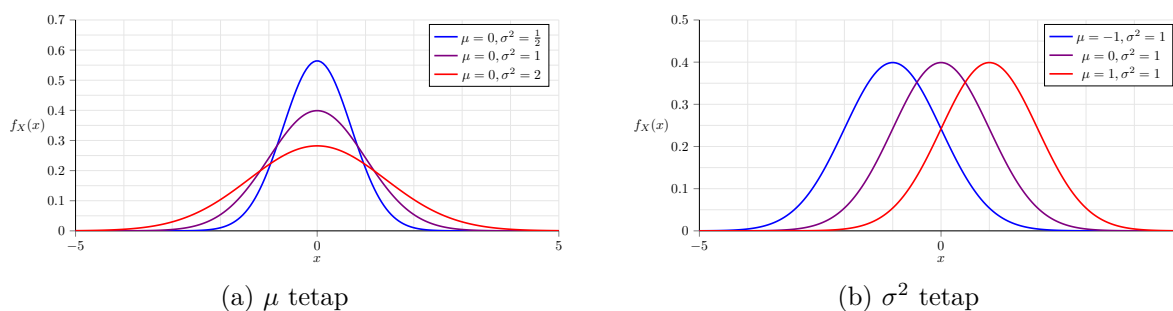
$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Grafik *pdf* dari distribusi normal dengan μ yang tetap tetapi σ^2 yang berbeda-beda, serta sebaliknya ditunjukkan pada Gambar 2.1a dan Gambar 2.1b. Dari Gambar 2.1a dapat dilihat bahwa ketika μ tetap dan σ^2 berubah-ubah, lebar dari grafik *pdf* juga berubah tanpa mengubah posisi dan bentuknya, sehingga bisa disimpulkan bahwa σ^2 merupakan parameter skala. Sebaliknya, pada Gambar 2.1b, ketika μ berubah-ubah dan σ^2 tetap, posisi dari grafik *pdf* bergeser tanpa mengubah bentuk dan lebarnya, sehingga μ merupakan parameter lokasi.

Jika didefinisikan

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad (2.11)$$

maka Z berdistribusi normal dengan parameter rata-rata bernilai nol dan variansi bernilai satu, yang disebut juga dengan distribusi normal standar dengan notasi $Z \sim N(0, 1)$. Dengan menyesuaikan



Gambar 2.1: Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi normal

parameter pada persamaan (2.10), *pdf* dari Z adalah

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},$$

atau dapat dinotasikan juga dengan $\phi(z)$. Untuk kebutuhan penelitian ini, akan dibuktikan juga bahwa hasil turunan dari $\phi(z)$ adalah $-z\phi(z)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\phi(z) &= \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\ &= -\frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\ &= -z\phi(z). \end{aligned}$$

Selain itu, *cumulative distribution function* (*cdf*) dari distribusi normal standar juga dapat dinotasikan dengan $\Phi(z)$.

2.4.2 Distribusi *Half-Normal*

Misal diberikan $Y \sim N(0, \frac{\omega\pi}{2})$, sehingga dengan menggunakan persamaan (2.10) diperoleh *pdf* dari Y yaitu

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{\omega}} e^{-\frac{y^2}{\omega\pi}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Kemudian, jika didefinisikan $X = |Y|$, maka X dikatakan memiliki distribusi *half-normal* dengan parameter ω yang dilambangkan dengan $X \sim \text{half}.N(\omega)$. Untuk mencari *pdf* dari X , invers transformasi dari X adalah $Y = -X$ atau $Y = X$. Dengan menggunakan teknik *change of variable*, ketika $Y = -X$ diperoleh

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_Y(y) \left| \frac{dy}{dx} \right| \\ &= f_Y(y) |-1| \\ &= f_Y(-x) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{\omega}} e^{-\frac{x^2}{\omega\pi}}, \end{aligned}$$

dan ketika $Y = X$ diperoleh

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_Y(y) \left| \frac{dy}{dx} \right| \\ &= f_Y(y) |1| \\ &= f_Y(x) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{\omega}} e^{-\frac{x^2}{\omega\pi}}, \end{aligned}$$

sehingga *pdf* dari X adalah

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{\omega}} e^{-\frac{x^2}{\omega\pi}} + \frac{1}{\pi\sqrt{\omega}} e^{-\frac{x^2}{\omega\pi}} \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{\omega}} e^{-\frac{x^2}{\omega\pi}}, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

Kemudian, ekspektasi dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2x}{\pi\sqrt{\omega}} e^{-\frac{x^2}{\omega\pi}} dx. \end{aligned}$$

Misal $z = \frac{x^2}{\omega\pi}$, maka $dx = \frac{\omega\pi}{2x} dz$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\sqrt{\omega}} e^{-z} dz \\ &= \int_0^{\infty} \sqrt{\omega} e^{-z} dz \\ &= \sqrt{\omega}. \end{aligned}$$

Untuk mencari nilai variansi dari X , perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} X &= |Y| \\ \Leftrightarrow X^2 &= Y^2 \\ \Leftrightarrow E(X^2) &= E(Y^2). \end{aligned}$$

Dengan $Y \sim N(0, \frac{\omega\pi}{2})$, diperoleh

$$E(X^2) = \text{Var}(Y) + E(Y)^2 = \frac{\omega\pi}{2},$$

sehingga

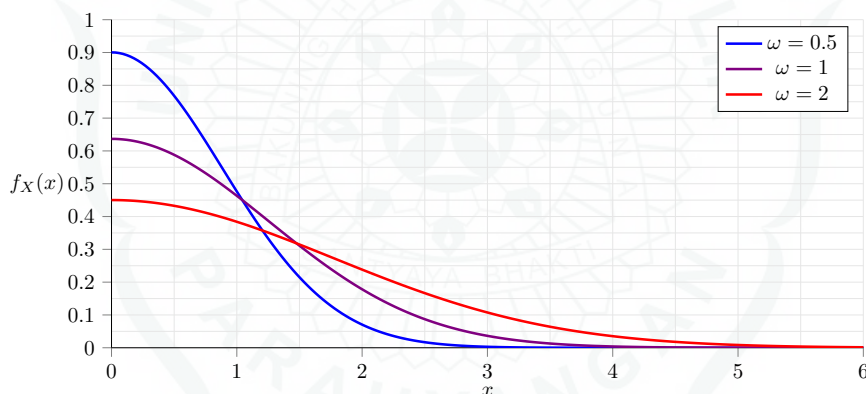
$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{\omega\pi}{2} - (\sqrt{\omega})^2 \\ &= \omega \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Jadi, nilai ekspektasi dari distribusi *half-normal* adalah $\sqrt{\omega}$ dan nilai variansi dari distribusi

half-normal adalah $\omega \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. Terakhir, *mgf* dari X dapat dibentuk dengan

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{2}{\pi\sqrt{\omega}} e^{-\frac{x^2}{\pi\omega}} dx \\
 &= \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{[x - \frac{t\pi\omega}{2}]^2 - (\frac{t\pi\omega}{2})^2}{\pi\omega}\right)\right\} \frac{2}{\pi\sqrt{\omega}} dx \\
 &= \exp\left\{\frac{(\frac{t\pi\omega}{2})^2}{\pi\omega}\right\} \frac{2}{\pi\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{\pi\omega}{2}} 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}} 2\pi} \exp\left\{-\left(\frac{[x - \frac{t\pi\omega}{2}]^2}{2\frac{\pi\omega}{2}}\right)\right\} dx \\
 &= 2 \exp\left\{\frac{\pi\omega}{4} t^2\right\} \Pr(0 < X < \infty), \quad \text{dengan } X \sim N\left(\frac{t\pi\omega}{2}, \frac{\pi\omega}{2}\right) \\
 &= 2 \exp\left\{\frac{\pi\omega}{4} t^2\right\} \Pr\left(\frac{-t\pi\omega}{\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}}} < Z < \infty\right), \quad \text{dengan } Z \sim N(0, 1) \\
 &= 2 \exp\left\{\frac{\pi\omega}{4} t^2\right\} \left[1 - \Phi\left(-t\sqrt{\frac{\pi\omega}{2}}\right)\right].
 \end{aligned}$$

Gambar 2.2 menunjukkan grafik *pdf* dari distribusi *half-normal* dengan ω yang berbeda-beda. Dapat dilihat bahwa grafik *pdf* dari distribusi *half-normal* menyerupai grafik *pdf* dari distribusi normal yang dibagi dua sesuai dengan namanya. Selain itu, ω merupakan parameter skala dari distribusi *half-normal*, yang berarti nilai ω memengaruhi kelebaran dari grafik tersebut.



Gambar 2.2: Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi *half-normal* dengan ω berbeda

2.4.3 Distribusi Log-Normal

Misal diberikan $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, sehingga dengan menggunakan persamaan (2.11) diperoleh *cdf* dari Y yaitu

$$F_Y(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right).$$

Kemudian, jika didefinisikan $X = e^Y$, maka X berdistribusi log-normal dengan parameter μ dan σ^2 , yang dapat dinotasikan dengan $X \sim \text{log-}N(\mu, \sigma^2)$. Karena X merupakan peubah acak kontinu, maka *cdf* dari X dapat dicari menggunakan teknik *cdf*. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= P(X \leq x) \\
 &= P(e^Y \leq x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(Y \leq \ln x) \\
&= F_Y(\ln x) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Selanjutnya, *pdf* dari X dapat diperoleh dengan

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} \\
&= \frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{x} \phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad 0 < x < \infty.
\end{aligned}$$

Momen ke- n dari X adalah

$$\begin{aligned}
E(X^n) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} x^n \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx.
\end{aligned}$$

Misal $z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$ dan $dx = \sigma e^{\sigma z + \mu} dz$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
E(X^n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(n-1)(\sigma z + \mu)} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma e^{(\sigma z + \mu)} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(n\sigma z + n\mu)} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(n\sigma z + n\mu)} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{\frac{1}{2}(-2n\sigma z + n^2\sigma^2)} e^{-\frac{1}{2}(-2n\sigma z + n^2\sigma^2)} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2n\sigma z + n^2\sigma^2)} e^{\left(\frac{n^2\sigma^2}{2} + n\mu\right)} dz \\
&= e^{\left(\frac{n^2\sigma^2}{2} + n\mu\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z - n\sigma)^2} dz \\
&= e^{\left(\frac{n^2\sigma^2}{2} + n\mu\right)}.
\end{aligned}$$

Kemudian, ekspektasi dari X adalah

$$E(X) = e^{\left(\frac{1^2\sigma^2}{2} + 1\mu\right)} = e^{\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu\right)}. \quad (2.12)$$

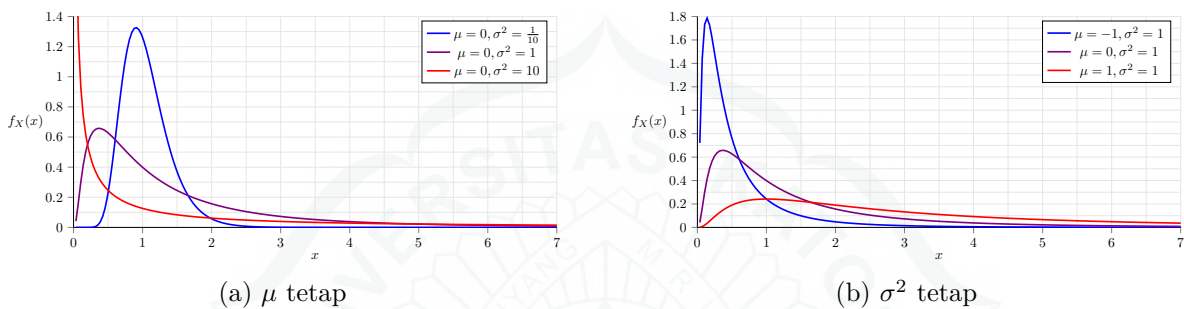
Dengan demikian, variansi dari X , yaitu

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= e^{\left(\frac{4\sigma^2}{2} + 2\mu\right)} - e^{[\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu\right)]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{(2\sigma^2-2\mu)} - e^{(\sigma^2+2\mu)} \\
 &= (e^{\sigma^2} - 1)(e^{(\sigma^2+2\mu)}).
 \end{aligned}$$

Jadi, nilai ekspektasi dari distribusi log-normal adalah $e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}+\mu\right)}$ dan nilai variansi dari distribusi log-normal adalah $(e^{\sigma^2} - 1)(e^{(\sigma^2+2\mu)})$.

Grafik *pdf* dari distribusi log-normal dengan μ yang tetap tetapi σ^2 yang berbeda-beda, serta sebaliknya ditunjukkan pada Gambar 2.3a dan Gambar 2.3b. Dari Gambar 2.3a dapat dilihat bahwa ketika μ tetap dan σ^2 berubah-ubah, bentuk dari grafik *pdf* juga berubah sehingga bisa disimpulkan bahwa σ^2 merupakan parameter bentuk. Sebaliknya pada Gambar 2.3b, ketika μ berubah-ubah dan σ^2 tetap, kelebaran dari grafik *pdf* berubah tanpa mengubah bentuk dan posisinya, sehingga μ merupakan parameter skala.



Gambar 2.3: Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi log-normal

2.4.4 Distribusi *Truncated Normal*

Misal diberikan $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Jika peubah acak X adalah peubah acak Y yang dipancarkan kiri sehingga hanya terdefinisi di garis riil positif, atau dilambangkan dengan $X = (Y|Y > 0)$, maka X dikatakan memiliki distribusi normal terpancung dengan titik pemancungan kiri $a = 0$ dan titik pemancungan kanan b di ketakhinggaan. Distribusi tersebut dapat dilambangkan dengan $X \sim \text{trun.}N(\mu, \sigma^2, 0, \infty)$ ¹, di mana *pdf* dan *cdf* dari X secara berurutan adalah

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= f_{Y|Y>0}(x|Y > 0) \\
 &= \frac{f_Y(x)}{\Pr(Y > 0)} \\
 &= \frac{\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}, \quad 0 < x < \infty,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

dan

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= F_{Y|Y>0}(x|Y > 0) \\
 &= \frac{F_Y(x) - F_Y(0)}{\Pr(Y > 0)}
 \end{aligned}$$

¹Secara umum distribusi *truncated normal* merupakan hasil pemancungan kiri di titik a dan pemancungan kanan di titik b dari distribusi normal, dengan $a < b$ bisa nilai berapapun. Dalam kasus umum ini didapatkan $X = (Y|a < Y < b) \sim \text{trun.}N(\mu, \sigma^2, a, b)$. Namun, dalam penelitian ini dikhususkan titik pemancungannya adalah $a = 0$ dan $b = \infty$.

$$= \frac{\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}.$$

Kemudian, ekspektasi dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x \frac{\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} dx \\ &= \frac{1}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \int_0^{\infty} x \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \\ &= \frac{-\sigma^2}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \int_0^{\infty} \frac{-(x-\mu)}{\sigma^2} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx + \frac{\mu}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \int_0^{\infty} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \\ &= \frac{-\sigma^2}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \int_0^{\infty} \phi'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx + \frac{\mu}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \left(1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right) \\ &= \frac{-\sigma^2}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \left[\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]_0^{\infty} + \mu \\ &= \frac{\sigma^2 \phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} + \mu. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Selanjutnya, akan dicari variansi dari X . Perhatikan bahwa

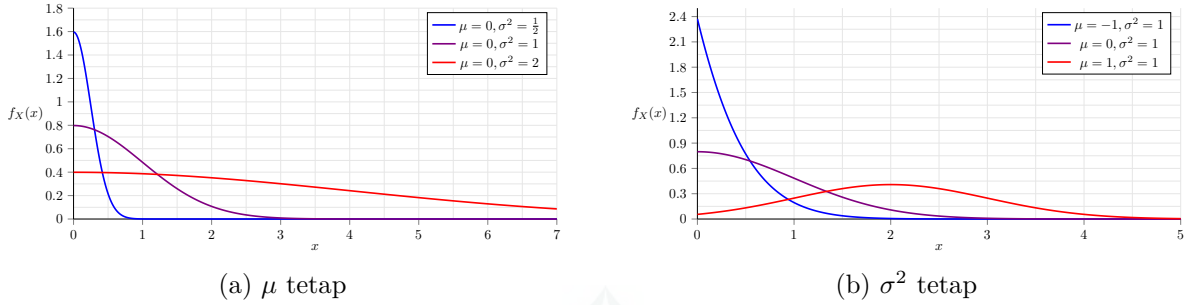
$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} dx \\ &= \frac{1}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \int_0^{\infty} x^2 \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \\ &= \frac{-\sigma^2}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \int_0^{\infty} \frac{-x(x-\mu)}{\sigma^2} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx + \frac{\mu}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \int_0^{\infty} x \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \\ &= \frac{-\sigma^2}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \int_0^{\infty} x \phi'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx + \mu \left[\frac{\sigma^2 \phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} + \mu \right] \\ &= \frac{-\sigma^2}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \left[x \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f_Y(x) dx \right] + \frac{\mu \sigma^2 \phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} + \mu^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \left[1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \right] + \frac{\mu \sigma^2 \phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} + \mu^2 \\ &= \frac{\mu \sigma^2 \phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} + \mu^2 + \sigma^2, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{\mu \sigma^2 \phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} + \mu^2 + \sigma^2 - \left(\frac{\sigma^2 \phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} + \mu \right)^2. \end{aligned}$$

Gambar 2.4a dan Gambar 2.4b menunjukkan grafik *pdf* dari distribusi *truncated* normal dengan μ yang tetap tetapi σ yang berbeda-beda, serta sebaliknya. Dari Gambar 2.4a dapat dilihat bahwa

ketika μ tetap dan σ^2 berubah-ubah, kelebaran dari grafik *pdf* juga berubah tanpa mengubah posisi dan bentuknya, sehingga dapat disimpulkan bahwa σ^2 merupakan parameter skala. Sebaliknya, pada Gambar 2.4b, ketika μ berubah-ubah dan σ^2 tetap, bentuk dari grafik *pdf* juga berubah, sehingga μ merupakan parameter bentuk. Lebih jauh, jelas terlihat bahwa grafik *pdf* distribusi *truncated* normal merupakan grafik *pdf* distribusi normal yang terpancung.



Gambar 2.4: Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi *truncated* normal

2.5 Keluarga Distribusi Gamma

Distribusi gamma adalah salah satu distribusi probabilitas kontinu untuk peubah acak non-negatif [6]. Distribusi ini sering digunakan untuk memodelkan berbagai kejadian, seperti waktu tunggu hingga terjadinya suatu kejadian atau besar klaim dalam suatu interval waktu. Distribusi gamma dapat dibentuk menjadi distribusi lain, sehingga kumpulan dari distribusi-distribusi yang dibentuk dari distribusi gamma disebut sebagai keluarga distribusi gamma.

2.5.1 Distribusi Gamma

Misal X adalah peubah acak non-negatif berdistribusi gamma dengan parameter α dan β yang dapat dinotasikan dengan $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, maka *pdf* dari X adalah

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0, \tag{2.15}$$

dengan fungsi gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0,$$

yang salah satu sifatnya adalah $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Kemudian, ekspektasi dari X adalah

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx. \end{aligned}$$

Misal $y = \frac{x}{\beta}$, maka $dx = \beta dy$. Akan diperoleh

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty (\beta y)^\alpha e^{-y} dy \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 1) \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\alpha \Gamma(\alpha)) \\ &= \alpha\beta. \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan dicari nilai variansi dari X . Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx. \end{aligned}$$

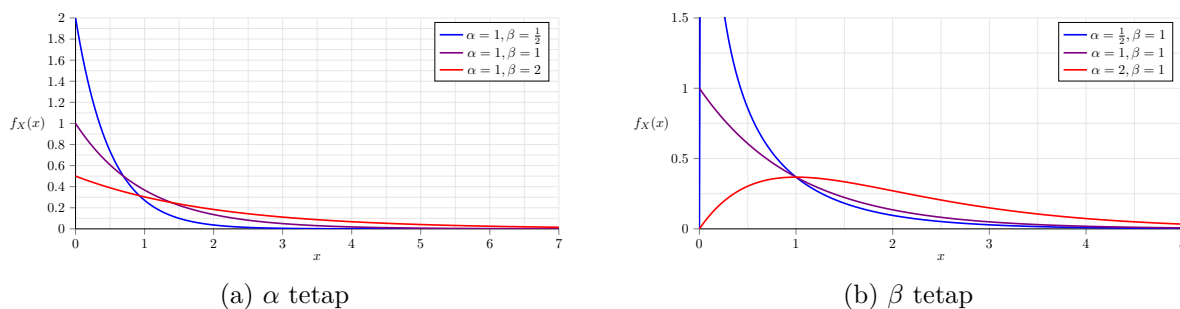
Dengan pemisalan yang sama saat menghitung $E(X)$, diperoleh

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty (\beta y)^{\alpha+1} e^{-y} dy \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y} dy \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 2) \\ &= \alpha(\alpha + 1)\beta^2, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \alpha(\alpha + 1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 \\ &= \alpha\beta^2. \end{aligned}$$

Gambar 2.5a menunjukkan grafik *pdf* dari distribusi gamma dengan α yang tetap dan β yang berubah-ubah dan Gambar 2.5b menunjukkan sebaliknya. Dari Gambar 2.5a dapat dilihat bahwa semakin besar nilai dari β , maka grafik akan semakin landai tanpa mengubah posisi atau bentuknya, sehingga dapat disimpulkan β adalah parameter skala. Kemudian, dari Gambar 2.5b dapat dilihat bahwa ketika parameter $\alpha < 1$, grafik *pdf* distribusi gamma memiliki asimtot tegak di $x = 0$, ketika $\alpha = 1$ grafik akan menurun secara eksponensial, sementara ketika $\alpha > 1$ akan terbentuk gunung yang *right-skewed*. Dengan demikian, distribusi gamma memiliki parameter bentuk α .



Gambar 2.5: Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi gamma

2.5.2 Distribusi Invers-Gamma

Misal diberikan $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Kemudian, jika didefinisikan $X = \frac{\beta^2}{Y}$, maka X dikatakan memiliki distribusi invers-gamma dengan parameter α dan β yang dilambangkan dengan $X \sim \text{inv.}\Gamma(\alpha, \beta)$. Untuk mencari *pdf* dari X , invers transformasi dari X adalah $Y = \frac{\beta^2}{X}$, sehingga dengan menggunakan persamaan (2.15) diperoleh *pdf* dari X yaitu

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= f_Y(y) \left| \frac{dy}{dx} \right| \\
 &= f_Y\left(\frac{\beta^2}{x}\right) \left| -\frac{\beta^2}{x^2} \right| \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \left(\frac{\beta^2}{x}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{\beta^2}{x}\right)}{\beta}\right\} \\
 &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}}, \quad x > 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Momen ke- n dari X adalah

$$\begin{aligned}
 E(X^n) &= \int_0^\infty x^n \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha-n)\beta^n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n)} x^{-(\alpha-n)-1} e^{-\frac{\beta}{x}} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha-n)\beta^n}{\Gamma(\alpha)}, \quad n < \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Kemudian, ekspektasi dari X adalah

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha-1)\beta}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\beta}{\alpha-1}.$$

Selanjutnya, akan dicari variansi dari X . Perhatikan bahwa

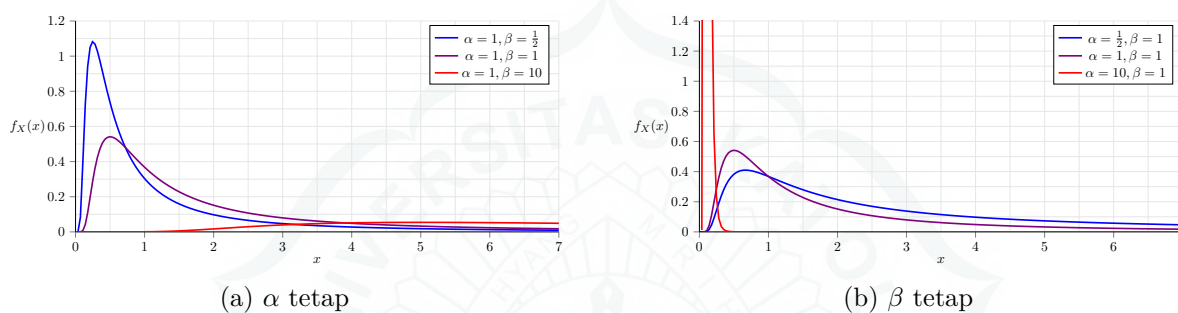
$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha-2)\beta^2}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)},$$

sehingga

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} - \left(\frac{\beta}{\alpha - 1}\right)^2 \\
&= \frac{\beta^2(\alpha - 1) - \beta^2(\alpha - 2)}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \\
&= \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}.
\end{aligned}$$

Gambar 2.6a dan Gambar 2.6b menunjukkan grafik *pdf* dari distribusi invers-gamma dengan α yang tetap tetapi β yang berbeda-beda, dan sebaliknya. Dari Gambar 2.6a dan Gambar 2.6b dapat dilihat bahwa β memiliki peran sebagai parameter skala, karena perubahannya mengakibatkan berubahnya kelandaian grafik tanpa mengubah bentuk dan posisinya. Sementara α berperan sebagai parameter bentuk, karena perubahannya mengakibatkan perubahan bentuk grafik yang cukup signifikan.



Gambar 2.6: Grafik fungsi kepadatan peluang distribusi invers-gamma

BAB 3

BAYESIAN *CHAIN LADDER* DENGAN ASUMSI *HALF-NORMAL*

Pada Bab 3, akan diasumsikan data *run-off triangle* berdistribusi *half-normal*. Dengan menggunakan beberapa asumsi, metode Bayesian dapat memodifikasi metode Mack *Chain Ladder* melalui *development factor*-nya. Pada bagian ini, terdapat pembahasan mengenai asumsi-asumsi yang akan digunakan pada metode Bayesian *Chain Ladder*, penurunan *development factor* Bayesian, penerapan *development factor* Bayesian terhadap prediksi cadangan IBNR, serta demonstrasi BIT untuk *run-off triangle half-normal*.

3.1 Asumsi Bayesian *Chain Ladder* untuk *Half-Normal*

Asumsi yang ditetapkan pada metode ini bertujuan sebagai dasar dan acuan dalam proses konstruksi *development factor* Bayesian untuk *half-normal* [2]. Beberapa asumsi yang digunakan dalam konstruksi *development factor* Bayesian untuk *half-normal* adalah sebagai berikut.

A1 Variabel acak besaran klaim kumulatif $S_{i,j}$ diasumsikan memiliki sifat Markov atas j di tahun kejadian yang sama, yang berarti bahwa distribusi dari $S_{i,j}$ hanya bergantung pada $S_{i,j-1}$ sekalipun $\{S_{i,0}, S_{i,1}, \dots, S_{i,j-2}\}$ juga diketahui, atau jika dituliskan secara matematis adalah

$$(S_{i,j}|S_{i,0}, S_{i,1}, \dots, S_{i,j-1}) \stackrel{D}{=} (S_{i,j}|S_{i,j-1}).$$

A2 Vektor acak *prior* $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n-1})$ memiliki entri-entri yang merupakan variabel acak penundaan di tahun yang bersesuaian, di mana setiap Θ_j diasumsikan saling bebas dan

$$\Theta_j \sim \text{inv.}\Gamma(\alpha_j, \beta_j),$$

untuk suatu $\alpha_j, \beta_j > 0$.

A3 Distribusi dari $S_{i,j}$ di suatu tahun penundaan hanya bergantung pada variabel acak penundaan di tahun yang bersesuaian dan saling bebas terhadap variabel acak penundaan di tahun lainnya, yang dapat dituliskan sebagai

$$(S_{i,j}|\theta) \stackrel{D}{=} (S_{i,j}|\theta_j).$$

A4 Kenaikan besaran klaim kumulatif selama satu tahun penundaan berdasarkan variabel penun-

daan di tahun yang bersesuaian diasumsikan berdistribusi *half-normal*, dengan

$$(S_{i,j}|S_{i,j-1}, \theta_j) \sim \text{half}.N(\theta_j S_{i,j-1}^2).$$

A5 Vektor acak penundaan Θ diasumsikan saling bebas dengan semua variabel acak besaran klaim kumulatif yang tidak tertunda $\mathbf{S}_0 = (S_{1,0}, S_{2,0}, \dots, S_{n,0})$.

A6 Variabel acak besaran klaim kumulatif tidak tertunda \mathbf{S}_0 bersifat saling bebas, dan secara bersama-sama saling bebas juga dengan tahun penundaan lainnya.

Dengan demikian, melalui asumsi A1, A3, dan A4, diperoleh

$$(S_{i,j}|S_{i,0}, S_{i,1}, \dots, S_{i,j-1}, \boldsymbol{\theta}) \stackrel{D}{=} (S_{i,j}|S_{i,j-1}, \theta_j) \sim \text{half}.N(\theta_j S_{i,j-1}^2), \quad (3.1)$$

sehingga

$$E(S_{i,j}|S_{i,0}, S_{i,1}, \dots, S_{i,j-1}, \boldsymbol{\theta}) = E(S_{i,j}|S_{i,j-1}, \theta_j) = \sqrt{\theta_j} S_{i,j-1}. \quad (3.2)$$

Dapat dilihat dari persamaan (3.2) bahwa $\sqrt{\theta_j}$ mempunyai peran yang serupa dengan f_j pada metode Mack *Chain Ladder* seperti pada persamaan (2.3), sehingga dengan menggunakan persamaan (2.17) diperoleh

$$E(\sqrt{\Theta_j}) = \frac{\Gamma(\alpha_j - \frac{1}{2})\beta_j^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha_j)}. \quad (3.3)$$

Jadi, *development factor* pada Bayesian *Chain Ladder* bergantung pada variabel acak $\sqrt{\Theta_j}$ dan *development factor* pada distribusi *prior*-nya berhubungan dengan persamaan (3.3).

3.2 Development Factor Bayesian untuk Half-Normal

Seperti yang telah dibahas pada Subsubbab 2.3.2, terdapat tiga distribusi yang berhubungan dengan metode Bayesian, yaitu distribusi *prior*, model data, dan *posterior*. Selain itu, ketiga distribusi tersebut juga memiliki hubungan, di mana *posterior* proporsional dengan model data dikali *prior*. Oleh karena itu, *development factor* Bayesian dapat dikonstruksi dengan proses sebagai berikut.

1. Distribusi *Prior*

Distribusi *prior* yang digunakan adalah distribusi invers-gamma, yaitu distribusi dari Θ_j . Berdasarkan asumsi A2, *pdf* dari *prior* dapat diperoleh menggunakan persamaan (2.16), yaitu

$$\begin{aligned} \pi_{\Theta}(\boldsymbol{\theta}) &= \pi_{\Theta}(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \\ &= \pi_{\Theta}(\theta_0) \times \pi_{\Theta}(\theta_1) \times \dots \times \pi_{\Theta}(\theta_{n-1}) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)} \theta_j^{-(\alpha_j+1)} \exp\left\{-\frac{\beta_j}{\theta_j}\right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

2. Distribusi Model Data

Probability density function distribusi model data diperoleh dari perkalian *pdf* setiap klaim kumulatif yang sudah diobservasi. Dengan asumsi A5 dan A6 serta persamaan (3.1), *pdf* dari

model data yang diperoleh adalah

$$f_{\mathbf{S}|\Theta}(\mathbf{S}|\theta) = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} \frac{2}{\pi \sqrt{\theta_j} S_{i,j-1}} \exp \left\{ \frac{-S_{i,j}^2}{\pi \theta_j S_{i,j-1}^2} \right\} \times f_{\mathbf{S}_0}(S_{1,0}, S_{2,0}, \dots, S_{n,0}), \quad (3.5)$$

dengan \mathbf{S} adalah seluruh data klaim kumulatif yang sudah diobservasi.

3. Distribusi Posterior

Distribusi *prior* pada persamaan (3.4) dan distribusi data pada persamaan (3.5) dapat digunakan untuk mencari distribusi *posterior*. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f_{\Theta|\mathbf{S}}(\theta|\mathbf{S}) &\propto f_{\mathbf{S}|\Theta}(\mathbf{S}|\theta) \times \pi_{\Theta}(\theta) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} \frac{2}{\pi \sqrt{\theta_j} S_{i,j-1}} \exp \left\{ \frac{-S_{i,j}^2}{\pi \theta_j S_{i,j-1}^2} \right\} \times f_{\mathbf{S}_0}(S_{1,0}, S_{2,0}, \dots, S_{n,0}) \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{\beta_j^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)} \theta_j^{-(\alpha_j+1)} \exp \left\{ -\frac{\beta_j}{\theta_j} \right\} \right) \\ &\propto \left(\prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} \frac{1}{\sqrt{\theta_j}} \exp \left\{ \frac{-S_{i,j}^2}{\pi \theta_j S_{i,j-1}^2} \right\} \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \theta_j^{-(\alpha_j+1)} \exp \left\{ -\frac{\beta_j}{\theta_j} \right\} \right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta_j}} \right)^{n-j} \exp \left\{ \frac{-1}{\pi \theta_j} \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}} \right)^2 \right\} \right) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \theta_j^{-(\alpha_j+1)} \exp \left\{ -\frac{\beta_j}{\theta_j} \right\} \right) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \theta_j^{-(\alpha_j + \frac{n-j}{2} + 1)} \exp \left\{ \frac{-1}{\theta_j} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}} \right)^2 + \beta_j \right] \right\}. \end{aligned}$$

Jadi, distribusi yang diperoleh untuk masing-masing $\Theta_j|\mathbf{S}$ adalah

$$\Theta_j|\mathbf{S} \sim \text{inv.}\Gamma \left(\alpha_j + \frac{n-j}{2}, \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}} \right)^2 + \beta_j \right).$$

Dari sini terlihat bahwa baik *prior* maupun *posterior* sama-sama mengikuti distribusi invers-gamma, sehingga invers-gamma merupakan *conjugate prior* untuk distribusi *half-normal*. Lebih jauh, menggunakan persamaan (3.3), diperoleh *development factor* Bayesian untuk *half-normal*, yaitu

$$\begin{aligned} \hat{f}_j^{HN} &= E \left(\sqrt{\Theta_j} | \mathbf{S} \right) \\ &= \frac{\Gamma \left(\alpha_j + \frac{n-j-1}{2} \right)}{\Gamma \left(\alpha_j + \frac{n-j}{2} \right)} \sqrt{ \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}} \right)^2 + \beta_j }. \end{aligned}$$

3.3 Hasil Prediksi IBNR untuk Bayesian Chain Ladder dengan Asumsi Half-Normal

Data yang digunakan untuk perhitungan ini diambil dari laporan tahunan *Australian Prudential Regulation Authority* (APRA), khususnya pada data klaim asuransi *compulsory third party* (CTP) dari tahun 2012 sampai 2021. Data tersebut tersaji dalam bentuk inkremental seperti pada Tabel

3.1. Selanjutnya, data pada Tabel 3.1 terlebih dahulu diubah menjadi bentuk data kumulatif seperti pada Tabel 3.2.

Tabel 3.1: Data klaim inkremental asuransi CTP (dalam jutaan dolar Australia)

Tahun Kejadian (i)	Tahun Penundaan (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2012	1.812	990	597	291	185	102	54	30	19	17
2013	1.799	941	537	258	111	90	48	35	27	
2014	1.851	1.001	511	188	133	56	48	44		
2015	1.982	1.030	587	244	48	55	51			
2016	1.930	1.122	602	205	133	111				
2017	2.067	1.139	521	194	133					
2018	2.158	1.204	539	290						
2019	1.932	1.035	571							
2020	1.756	979								
2021	1.653									

Tabel 3.2: Data klaim kumulatif asuransi CTP (dalam jutaan dolar Australia)

Tahun Kejadian (i)	Tahun Penundaan (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2012	1.812	2.802	3.399	3.690	3.875	3.977	4.031	4.061	4.080	4.097
2013	1.799	2.740	3.277	3.535	3.646	3.736	3.784	3.819	3.846	
2014	1.851	2.852	3.363	3.551	3.684	3.740	3.788	3.832		
2015	1.982	3.012	3.599	3.843	3.891	3.946	3.997			
2016	1.930	3.052	3.654	3.859	3.992	4.103				
2017	2.067	3.206	3.727	3.921	4.054					
2018	2.158	3.362	3.901	4.191						
2019	1.932	2.967	3.538							
2020	1.756	2.735								
2021	1.653									

Sebelum mengisi *future triangle*, terdapat dua parameter pada *development factor* Bayesian (\hat{f}_j^{HN}) yang perlu ditentukan nilainya, yaitu α_j dan β_j . Pada kasus ini, dipilih nilai $\alpha_j = 45$ untuk setiap tahun penundaan. Alasan pemilihan nilai α_j ini didasari oleh interpretasi dari parameter bentuk itu sendiri. Distribusi invers-gamma diketahui memiliki hubungan dengan distribusi invers *chi-square* seperti halnya distribusi gamma dengan distribusi *chi-square*, di mana parameter bentuk pada distribusi invers-gamma berhubungan dengan derajat kebebasan pada distribusi invers *chi-square*. Oleh karena terdapat sebanyak 45 entri yang harus diprediksi pada data tersebut, maka dipilih nilai $\alpha_j = 45$ yang menggambarkan derajat kebebasan data tersebut.

Parameter kedua yang perlu ditentukan adalah β_j . Perhatikan pada persamaan (3.6) terdapat bagian $\sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}} \right)^2$, yang serupa dengan *development factor average* (\hat{f}_j^A) pada persamaan (2.2), yang mana perbedaannya hanyalah suku-sukunya terlebih dahulu dikuadratkan sebelum dijumlahkan. Dengan alasan tersebut, cukup beralasan jika nilai β_j ditentukan berdasarkan *development factor mean* (\hat{f}_j^M) pada persamaan (2.1), tetapi dikuadratkan suku-sukunya, sehingga \hat{f}_j^{HN} serupa dengan rata-rata berbobot antara \hat{f}_j^A dan \hat{f}_j^M . Oleh karena itu, nilai β_j dipilih sedemikian sehingga akan

berhubungan dengan $\frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j-1}^2}$ yang dapat dituliskan sebagai

$$\beta_j = k \times \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j-1}^2},$$

di mana k merupakan suatu konstanta. Berdasarkan persamaan (3.3), dapat diperoleh

$$E(\sqrt{\Theta_j}) = \frac{\Gamma(\alpha_j - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha_j)} \sqrt{k \times \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j-1}^2}}.$$

Dalam metode Mack Chain Ladder, development factor yang paling umum digunakan adalah \hat{f}_j^M , sehingga cukup beralasan jika secara intuitif development factor prior dekat dengan \hat{f}_j^M . Untuk menghubungkan $E(\sqrt{\Theta_j})$ dengan $\frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j-1}^2}$, maka dipilih

$$k = \left(\frac{\Gamma(\alpha_j)}{\Gamma(\alpha_j - \frac{1}{2})} \right)^2,$$

sehingga

$$\beta_j = \left(\frac{\Gamma(\alpha_j)}{\Gamma(\alpha_j - \frac{1}{2})} \right)^2 \times \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j-1}^2}$$

dan

$$E(\sqrt{\Theta_j}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j-1}^2}} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j-1}}.$$

Jadi, didapat

$$\hat{f}_j^{HN} = \frac{\Gamma(\alpha_j + \frac{n-j-1}{2})}{\Gamma(\alpha_j + \frac{n-j}{2})} \sqrt{\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma(\alpha_j)}{\Gamma(\alpha_j - \frac{1}{2})} \right)^2 \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j-1}^2}}. \quad (3.6)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.6), (2.1), dan (2.2) secara berturut-turut, dapat diperoleh development factor Bayesian (\hat{f}_j^{HN}), development factor mean (\hat{f}_j^M), dan development factor average (\hat{f}_j^A) yang tersaji pada Tabel 3.3. Perhatikan bahwa nilai dari development factor Bayesian, mean, dan average selalu menurun seiring berjalannya waktu penundaan. Hal tersebut disebabkan oleh perubahan nilai klaim yang semakin menurun juga di setiap waktu penundaan. Jika dilihat lebih lanjut, penurunan yang terjadi pada development factor mean dan average hampir serupa, sedangkan development factor Bayesian mengalami penurunan yang lebih drastis. Peristiwa ini selaras dengan sifat ekor tipis dari distribusi half-normal, di mana ekor dari distribusi akan lebih cepat menuju ke nol.

Melalui development factor Bayesian (\hat{f}_j^{HN}) yang telah diperoleh, future triangle dapat diisi dengan menggunakan hubungan seperti pada persamaan (2.3), yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 3.4. Sebagai metode pembandingan, disajikan pula data run-off triangle yang menggunakan metode Mack Chain Ladder dengan development factor mean (\hat{f}_j^M) dan average (\hat{f}_j^A) pada Tabel

Tabel 3.3: Perbandingan *development factor* Bayesian untuk *half-normal*

j	\hat{f}_j^{HN}	\hat{f}_j^M	\hat{f}_j^A
1	1,52027	1,54613	1,54594
2	1,16744	1,18610	1,18695
3	1,05261	1,06701	1,06722
4	1,02112	1,03317	1,03331
5	1,01179	1,02169	1,02163
6	1,00507	1,01305	1,01305
7	1,00332	1,00939	1,00944
8	1,00176	1,00584	1,00587
9	1,00213	1,00417	1,00417

Tabel 3.4: Data *run-off triangle* untuk Bayesian *Chain Ladder* (BCL) dengan asumsi *half-normal*

Tahun Kejadian (i)	Tahun Penundaan (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2012	1.812	2.802	3.399	3.690	3.875	3.977	4.031	4.061	4.080	4.097
2013	1.799	2.740	3.277	3.535	3.646	3.736	3.784	3.819	3.846	3.854
2014	1.851	2.852	3.363	3.551	3.684	3.740	3.788	3.832	3.839	3.847
2015	1.982	3.012	3.599	3.843	3.891	3.946	3.997	4.010	4.017	4.026
2016	1.930	3.052	3.654	3.859	3.992	4.103	4.124	4.138	4.145	4.154
2017	2.067	3.206	3.727	3.921	4.054	4.102	4.123	4.136	4.144	4.152
2018	2.158	3.362	3.901	4.191	4.279	4.330	4.352	4.366	4.374	4.383
2019	1.932	2.967	3.538	3.724	3.803	3.848	3.867	3.880	3.887	3.895
2020	1.756	2.735	3.193	3.361	3.432	3.472	3.490	3.502	3.508	3.515
2021	1.653	2.513	2.934	3.088	3.153	3.190	3.207	3.217	3.223	3.230
<i>Development Factor</i>	\hat{f}_1^{HN}	\hat{f}_2^{HN}	\hat{f}_3^{HN}	\hat{f}_4^{HN}	\hat{f}_5^{HN}	\hat{f}_6^{HN}	\hat{f}_7^{HN}	\hat{f}_8^{HN}	\hat{f}_9^{HN}	
	1,52027	1,16744	1,05261	1,02112	1,01179	1,00507	1,00332	1,00176	1,00213	

3.5 dan Tabel 3.6. Setelah diperoleh nilai *ultimate claims* (sel merah) dan *paid-to-date claims* (sel biru), maka nilai *outstanding claim* per tahun kejadiannya dapat diperoleh menggunakan persamaan (2.4) dan nilai prediksi cadangan IBNR diperoleh menggunakan persamaan (2.5), yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 3.7. Perhatikan bahwa *outstanding claims* pada Bayesian *Chain Ladder* untuk *half-normal* memiliki nilai paling rendah pada setiap tahun kejadiannya jika dibandingkan dengan *Mack Chain Ladder mean* dan *average*. Dari hal ini, jelas bahwa nilai *outstanding claims* sangat dipengaruhi oleh *development factor*-nya, sehingga masuk akal jika *outstanding claims* pada Bayesian *Chain Ladder* untuk *half-normal* memiliki nilai paling rendah.

Berdasarkan Tabel 3.7, metode Bayesian *Chain Ladder* dengan asumsi *half-normal* menghasilkan nilai prediksi cadangan IBNR sebesar 3.107 dalam jutaan dolar Australia. Di lain sisi, pada metode pembandingnya, *Mack Chain Ladder mean* dan *average*, diperoleh nilai prediksi cadangan IBNR secara berturut-turut sebesar 4.359 dan 4.369 dalam jutaan dolar Australia. Nilai prediksi cadangan IBNR merupakan penjumlahan dari *outstanding claim* pada setiap tahun kejadiannya, sehingga pada perbandingan ini, metode Bayesian *Chain Ladder* dengan asumsi *half-normal* memiliki nilai yang paling rendah. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa metode Bayesian *Chain Ladder* dengan asumsi *half-normal* dapat digunakan untuk menangkap informasi lebih baik pada data yang memiliki ekor tipis untuk menghindari kelebihan pencadangan dana IBNR pada perusahaan.

Tabel 3.5: Data *run-off triangle* untuk Mack *Chain Ladder* (MCL) *mean*

Tahun Kejadian (<i>i</i>)	Tahun Penundaan (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2012	1.812	2.802	3.399	3.690	3.875	3.977	4.031	4.061	4.080	4.097
2013	1.799	2.740	3.277	3.535	3.646	3.736	3.784	3.819	3.846	3.862
2014	1.851	2.852	3.363	3.551	3.684	3.740	3.788	3.832	3.854	3.870
2015	1.982	3.012	3.599	3.843	3.891	3.946	3.997	4.035	4.058	4.075
2016	1.930	3.052	3.654	3.859	3.992	4.103	4.157	4.196	4.220	4.238
2017	2.067	3.206	3.727	3.921	4.054	4.142	4.196	4.235	4.260	4.278
2018	2.158	3.362	3.901	4.191	4.330	4.424	4.482	4.524	4.550	4.569
2019	1.932	2.967	3.538	3.775	3.900	3.985	4.037	4.075	4.099	4.116
2020	1.756	2.735	3.244	3.461	3.576	3.654	3.701	3.736	3.758	3.774
2021	1.653	2.556	3.031	3.235	3.342	3.414	3.459	3.491	3.512	3.526
<i>Development Factor</i>	\hat{f}_1^M	\hat{f}_2^M	\hat{f}_3^M	\hat{f}_4^M	\hat{f}_5^M	\hat{f}_6^M	\hat{f}_7^M	\hat{f}_8^M	\hat{f}_9^M	
	1,54613	1,18610	1,06701	1,03317	1,02169	1,01305	1,00939	1,00584	1,00417	

Tabel 3.6: Data *run-off triangle* untuk Mack *Chain Ladder* (MCL) *average*

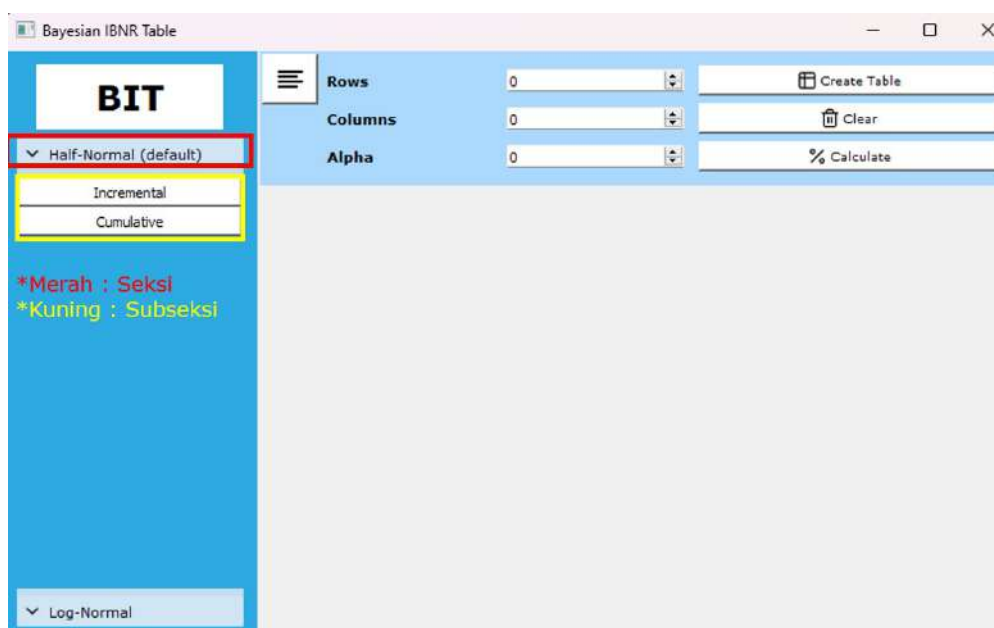
Tahun Kejadian (<i>i</i>)	Tahun Penundaan (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2012	1.812	2.802	3.399	3.690	3.875	3.977	4.031	4.061	4.080	4.097
2013	1.799	2.740	3.277	3.535	3.646	3.736	3.784	3.819	3.846	3.862
2014	1.851	2.852	3.363	3.551	3.684	3.740	3.788	3.832	3.855	3.871
2015	1.982	3.012	3.599	3.843	3.891	3.946	3.997	4.035	4.058	4.075
2016	1.930	3.052	3.654	3.859	3.992	4.103	4.157	4.196	4.220	4.238
2017	2.067	3.206	3.727	3.921	4.054	4.142	4.196	4.235	4.260	4.278
2018	2.158	3.362	3.901	4.191	4.331	4.424	4.482	4.524	4.551	4.570
2019	1.932	2.967	3.538	3.776	3.902	3.986	4.038	4.076	4.100	4.117
2020	1.756	2.735	3.246	3.465	3.580	3.657	3.705	3.740	3.762	3.778
2021	1.653	2.555	3.033	3.237	3.345	3.417	3.462	3.494	3.515	3.530
<i>Development Factor</i>	\hat{f}_1^A	\hat{f}_2^A	\hat{f}_3^A	\hat{f}_4^A	\hat{f}_5^A	\hat{f}_6^A	\hat{f}_7^A	\hat{f}_8^A	\hat{f}_9^A	
	1,54594	1,18695	1,06722	1,03331	1,02163	1,01305	1,00944	1,00587	1,00417	

Tabel 3.7: Perbandingan *outstanding claims* untuk *half-normal*

Tahun Kejadian (<i>i</i>)	BCL <i>Half-normal</i>	MCL <i>Mean</i>	MCL <i>Average</i>
2012	0	0	0
2013	8	16	16
2014	15	38	39
2015	29	78	78
2016	51	135	135
2017	98	224	224
2018	192	378	379
2019	357	578	579
2020	780	1.039	1.043
2021	1.577	1.873	1.877
IBNR	3.107	4.359	4.369

3.4 Demonstrasi BIT untuk *Run-Off Triangle Half-Normal*

Bayesian IBNR Table (BIT) merupakan *graphical user interface* (GUI) yang dibuat dengan bahasa pemrograman Python dan *library* PyQt5. Aplikasi BIT ini dibuat untuk memudahkan perhitungan prediksi cadangan IBNR dengan metode Bayesian *Chain Ladder* dengan asumsi *half-normal* dan *log-normal*. Terdapat dua seksi yang berbeda, yaitu seksi untuk data *run-off triangle half-normal* dan data *run-off triangle log-normal*. Masing-masing seksi juga memiliki dua subseksi, yaitu untuk jenis data *run-off triangle* inkremental dan kumulatif. Pada aplikasi ini, data *run-off triangle half-normal* dengan jenis inkremental ditetapkan sebagai *default*. Gambar 3.1 merupakan tampilan pertama yang akan dilihat setelah program dijalankan.



Gambar 3.1: Contoh tampilan awal program

Pada demonstrasi ini, akan diberi contoh cara penggunaan BIT pada data *run-off triangle half-normal* inkremental, tetapi sebelum itu perlu diketahui bahwa tanda pemisah desimal adalah tanda titik ($.$), bukan tanda koma ($,$). Langkah pertama, isi jumlah baris dari data *run-off triangle half-normal* pada bagian isian “Row” dan jumlah kolom pada bagian isian “Columns”, lalu klik tombol “Create Table” untuk membuat tabelnya. Selanjutnya, masukkan data *run-off triangle half-normal* pada tabel yang telah dibuat dan masukkan juga nilai parameter α dari data pada bagian isian “Alpha”. Contoh masukan dari data *run-off triangle half-normal* dapat dilihat pada Gambar 3.2. Kemudian, klik tombol “Calculate” untuk menghitung hasil prediksi cadangan IBNR dan tampilannya dapat dilihat pada Gambar 3.3. Selain menghitung hasil prediksi cadangan IBNR, program ini juga menghitung dan menampilkan prediksi *future triangle* yang ditandai dengan angka berwarna merah. Sebagai tambahan, untuk membersihkan tampilan pada tabel dapat mengklik tombol “Clear”.

Data *run-off triangle half-normal* kumulatif juga dapat digunakan pada program ini dengan terlebih dahulu memilih subseksi “Cumulative” pada seksi “Half-Normal” sebagaimana yang dimaksud pada Gambar 3.1. Selanjutnya, lakukan langkah yang sama seperti pada demonstrasi data *run-off triangle half-normal* inkremental tetapi data yang dimasukkan adalah data kumulatif.

The screenshot shows the 'Bayesian IBNR Table' application window. On the left, there is a sidebar with 'BIT' and a dropdown menu for 'Half-Normal (default)' with 'Incremental' selected. The main area has input fields for 'Rows' (10), 'Columns' (10), and 'Alpha' (45), along with 'Create Table', 'Clear', and 'Calculate' buttons. The central table displays the following data:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1812	990	597	291	185	102	54	30	19	17
2	1799	941	537	258	111	90	48	35	27	
3	1851	1001	511	188	133	56	48	44		
4	1982	1030	587	244	48	55	51			
5	1930	1122	602	205	133	111				
6	2067	1139	521	194	133					
7	2158	1204	539	290						
8	1932	1035	571							
9	1756	979								
10	1653									

Gambar 3.2: Contoh masukan data *run-off triangle half-normal* inkremental

The screenshot shows the same software interface as Gambar 3.2, but with calculated values. The table contains the following data:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1812.0	2802.0	3399.0	3690.0	3875.0	3977.0	4031.0	4061.0	4080.0	4097.0
2	1799.0	2740.0	3277.0	3535.0	3646.0	3736.0	3784.0	3819.0	3846.0	3854.177...
3	1851.0	2852.0	3363.0	3551.0	3684.0	3740.0	3788.0	3832.0	3838.7297...	3846.891...
4	1982.0	3012.0	3599.0	3843.0	3891.0	3946.0	3997.0	4010.287...	4017.3305...	4025.872...
5	1930.0	3052.0	3654.0	3859.0	3992.0	4103.0	4123.796...	4137.505...	4144.7718...	4153.584...
6	2067.0	3206.0	3727.0	3921.0	4054.0	4101.78...	4122.573...	4136.278...	4143.5431...	4152.353...
7	2158.0	3362.0	3901.0	4191.0	4279.4...	4329.93...	4351.886...	4366.353...	4374.0221...	4383.322...
8	1932.0	2967.0	3538.0	3724.11...	3802.7...	3847.57...	3867.080...	3879.936...	3886.7504...	3895.014...
9	1756.0	2735.0	3192.93...	3360.90...	3431.8...	3472.32...	3489.923...	3501.525...	3507.6748...	3515.132...
10	1653.0	2513.006...	2933.77...	3088.10...	3153.3...	3190.48...	3206.654...	3217.314...	3222.9650...	3229.817...

Cadangan IBNR: 3107.1659925254025

Gambar 3.3: Contoh hasil perhitungan menggunakan program dengan asumsi *half-normal*

BAB 4

BAYESIAN *CHAIN LADDER* DENGAN ASUMSI LOG-NORMAL

Pada Bab 4, diasumsikan data *run-off triangle* berdistribusi log-normal. Pembahasan pada bab ini serupa seperti bab sebelumnya, di mana terdapat pembahasan mengenai asumsi-asumsi yang akan digunakan pada metode Bayesian *Chain Ladder*, penurunan *development factor* Bayesian, dan penerapan *development factor* Bayesian terhadap prediksi cadangan IBNR.

4.1 Asumsi Bayesian *Chain Ladder* untuk *Log-Normal*

Pada metode ini, data klaim kumulatif diasumsikan berdistribusi log-normal. Data klaim kumulatif akan ditransformasi terlebih dahulu menjadi data log klaim kumulatif yang didefinisikan sebagai $D_{i,j} = \log S_{i,j}$, sehingga data log klaim kumulatif berdistribusi normal. Hal ini dilakukan dengan tujuan simplifikasi dalam pengonstruksian *development factor* Bayesian. Dalam konstruksi *development factor* Bayesian untuk log-normal, beberapa asumsi yang digunakan yakni sebagai berikut.

B1 Variabel acak besaran klaim kumulatif $S_{i,j}$ diasumsikan memiliki sifat Markov atas j di tahun kejadian yang sama, yang berarti bahwa distribusi dari $S_{i,j}$ hanya bergantung pada $S_{i,j-1}$ sekalipun $\{S_{i,0}, S_{i,1}, \dots, S_{i,j-2}\}$ juga diketahui, atau jika dituliskan secara matematis adalah

$$(S_{i,j} | S_{i,0}, S_{i,1}, \dots, S_{i,j-1}) \stackrel{D}{=} (S_{i,j} | S_{i,j-1}).$$

B2 Distribusi dari $S_{i,j}$ di suatu tahun penundaan hanya bergantung pada variabel acak penundaan di tahun yang bersesuaian dan saling bebas terhadap variabel acak penundaan di tahun lainnya, yang dapat dituliskan sebagai

$$(S_{i,j} | \boldsymbol{\theta}) \stackrel{D}{=} (S_{i,j} | \theta_j).$$

B3 Kenaikan besaran klaim kumulatif selama satu tahun penundaan berdasarkan variabel penundaan di tahun yang bersesuaian diasumsikan berdistribusi log-normal, dengan

$$(S_{i,j} | S_{i,j-1}, \theta_j) \sim \log-N(\log(\theta_j S_{i,j-1}), \sigma_j^2).$$

Misal $\log S_{i,j} = D_{i,j}$ dan $\log \theta_j = \lambda_j$, maka besaran log klaim kumulatif selama satu tahun

penundaan dapat dinyatakan dengan

$$(D_{i,j}|D_{i,j-1}, \lambda_j) \sim N(\lambda_j + D_{i,j-1}, \sigma_j^2).$$

B4 Vektor acak *prior* $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1})$ memiliki entri-entri yang merupakan variabel acak penundaan di tahun yang bersesuaian, di mana setiap Λ_j diasumsikan saling bebas, dengan

$$\Lambda_j \sim \text{trun.}N\left(\mu_j, \frac{\sigma_j^2}{\kappa_j}, 0, \infty\right),$$

dan σ_j diasumsikan diketahui.

B5 Vektor acak log penundaan Λ diasumsikan saling bebas dengan semua variabel acak besaran log klaim kumulatif yang tidak tertunda $\mathbf{D}_0 = (D_{1,0}, D_{2,0}, \dots, D_{n,0})$.

B6 Variabel acak besaran log klaim kumulatif tidak tertunda \mathbf{D}_0 bersifat saling bebas, dan secara bersama-sama saling bebas juga dengan tahun penundaan lainnya.

Dengan demikian, melalui asumsi B1, B2, dan B3, diperoleh

$$(S_{i,j}|S_{i,0}, S_{i,1}, \dots, S_{i,j-1}, \boldsymbol{\theta}) \stackrel{D}{=} (S_{i,j}|S_{i,j-1}, \theta_j) \sim \log-N(\log(\theta_j S_{i,j-1}), \sigma_j^2),$$

yang akibatnya

$$(D_{i,j}|D_{i,0}, D_{i,1}, \dots, D_{i,j-1}, \boldsymbol{\lambda}) = (D_{i,j}|D_{i,j-1}, \lambda_j) \sim N(\lambda_j + D_{i,j-1}, \sigma_j^2), \quad (4.1)$$

sehingga

$$E(D_{i,j}|D_{i,j-1}, \lambda_j) = \lambda_j + D_{i,j-1}. \quad (4.2)$$

Dari persamaan (4.2), jelas bahwa λ_j pada data log klaim kumulatif mempunyai peran yang serupa dengan $\log f_j$ pada data log klaim kumulatif dalam metode Mack *Chain Ladder*, yaitu sebagai *development factor*-nya.

4.2 Development Factor Bayesian untuk Log-Normal

Serupa dengan Subbab 3.2, *development factor* Bayesian mengikuti distribusi dari *posterior*-nya. Oleh karena itu, untuk memperoleh distribusi dari *posterior*, ditinjau terlebih dahulu distribusi *prior* dan model datanya. Dengan demikian, *development factor* Bayesian dapat dikonstruksi dengan proses sebagai berikut.

1. Distribusi *Prior*

Distribusi *prior* yang digunakan adalah distribusi *truncated* normal, yaitu distribusi dari λ_j . Berdasarkan asumsi B4, *pdf* dari *prior* dapat diperoleh menggunakan persamaan (2.13), yaitu

$$\begin{aligned} \pi_{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}) &= \pi_{\Lambda}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \\ &= \pi_{\Lambda}(\lambda_0) \times \pi_{\Lambda}(\lambda_1) \times \dots \times \pi_{\Lambda}(\lambda_{n-1}) \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\exp \left\{ -\frac{\kappa_j (\lambda_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\}}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_j^2}{\kappa_j} \left(1 - \Phi \left(-\frac{\sqrt{\kappa_j} \mu_j}{\sigma_j} \right) \right)}. \quad (4.3)$$

2. Distribusi Model Data

Probability density function distribusi model data diperoleh dari perkalian *pdf* setiap log klaim kumulatif yang sudah diobservasi. Dengan asumsi B5 dan B6 serta persamaan (4.1), *pdf* dari model data yang diperoleh adalah

$$f_{\mathbf{D}|\Lambda}(\mathbf{D}|\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} \frac{\exp \left\{ -\frac{(D_{i,j} - (\lambda_j + D_{i,j-1}))^2}{2\sigma_j^2} \right\}}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \times f_{\mathbf{D}_0}(D_{1,0}, D_{2,0}, \dots, D_{n,0}), \quad (4.4)$$

dengan \mathbf{D} adalah seluruh data log klaim kumulatif yang sudah diobservasi.

3. Distribusi Posterior

Distribusi *prior* pada persamaan (4.3) dan distribusi data pada persamaan (4.4) dapat digunakan untuk mencari distribusi *posterior*. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f_{\Lambda|\mathbf{D}}(\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{D}) &\propto f_{\mathbf{D}|\Lambda}(\mathbf{D}|\boldsymbol{\lambda}) \times \pi_{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} \frac{\exp \left\{ -\frac{(D_{i,j} - (\lambda_j + D_{i,j-1}))^2}{2\sigma_j^2} \right\}}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \times f_{\mathbf{D}_0}(D_{1,0}, D_{2,0}, \dots, D_{n,0}) \right) \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\exp \left\{ -\frac{\kappa_j (\lambda_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\}}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_j^2}{\kappa_j} \left(1 - \Phi \left(-\frac{\sqrt{\kappa_j} \mu_j}{\sigma_j} \right) \right)} \\ &\propto \left(\prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} \exp \left\{ -\frac{(D_{i,j} - (\lambda_j + D_{i,j-1}))^2}{2\sigma_j^2} \right\} \right) \times \left(\prod_{j=1}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{\kappa_j (\lambda_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\} \right) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - (\lambda_j + D_{i,j-1}))^2}{2\sigma_j^2} - \frac{\kappa_j (\lambda_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\} \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \exp \left\{ -\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j}^2 - 2\lambda_j D_{i,j} - 2D_{i,j} D_{i,j-1} + \lambda_j^2 + 2\lambda_j D_{i,j-1} + D_{i,j-1}^2)}{2\sigma_j^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\kappa_j \lambda_j^2 - 2\kappa_j \lambda_j \mu_j + \kappa_j \mu_j^2}{2\sigma_j^2} \right) \right\} \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \exp \left\{ -\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j}^2 - 2\lambda_j \sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j} - 2 \sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j} D_{i,j-1} + (n-j)\lambda_j^2}{2\sigma_j^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\lambda_j \sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j-1} + \sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j-1}^2 + \kappa_j \lambda_j^2 - 2\kappa_j \lambda_j \mu_j + \kappa_j \mu_j^2}{2\sigma_j^2} \right) \right\} \\ &\propto \prod_{j=1}^{n-1} \exp \left\{ \frac{2\lambda_j \sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j} - (n-j)\lambda_j^2 - 2\lambda_j \sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j-1} - \kappa_j \lambda_j^2 + 2\kappa_j \lambda_j \mu_j}{2\sigma_j^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{n-1} \exp \left\{ \frac{-\lambda_j^2 (n-j+\kappa_j) + 2\lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j \right)}{2\sigma_j^2} \right\} \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{(n-j+\kappa_j)}{2\sigma_j^2} \left[\lambda_j^2 - \frac{2\lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j \right)}{n-j+\kappa_j} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j} \right)^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} \exp \left\{ -\frac{(n-j+\kappa_j)}{2\sigma_j^2} \left[\lambda_j - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j} \right) \right]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Jadi, distribusi yang diperoleh untuk masing-masing $\Lambda_j | \mathbf{D}$ adalah

$$\Lambda_j | \mathbf{D} \sim \text{trun.N} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j}, \frac{\sigma_j^2}{n-j+\kappa_j}, 0, \infty \right).$$

Dari sini terlihat bahwa baik *prior* maupun *posterior* sama-sama mengikuti distribusi *truncated normal*, sehingga *truncated normal* merupakan *conjugate prior* untuk distribusi normal. Lebih jauh, menggunakan persamaan (2.14), diperoleh *development factor* Bayesian untuk log-normal, yaitu

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_j &= E(\Lambda_j | \mathbf{D}) \\
&= \frac{\sigma_j^2}{(n-j+\kappa_j) \left(1 - \Phi \left(- \left[\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j} \right] \frac{\sqrt{n-j+\kappa_j}}{\sigma_j} \right) \right)} \frac{\sqrt{n-j+\kappa_j}}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j} \right)^2}{\frac{\sigma_j^2}{n-j+\kappa_j}} \right] \right\} + \frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j} \\
&= \frac{\sigma_j \sqrt{n-j+\kappa_j}}{\sqrt{2\pi} (n-j+\kappa_j) \left(1 - \Phi \left(- \left[\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j} \right] \frac{\sqrt{n-j+\kappa_j}}{\sigma_j} \right) \right)} \\
&\quad \times \exp \left\{ - \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j \right)^2}{2\sigma_j^2 (n-j+\kappa_j)} \right] \right\} + \frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j},
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\hat{f}_j^{LN} &= \exp(\lambda_j) \\
&= \exp \left\{ \frac{\sigma_j \sqrt{n-j+\kappa_j}}{\sqrt{2\pi} (n-j+\kappa_j) \left(1 - \Phi \left(- \left[\frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j} \right] \frac{\sqrt{n-j+\kappa_j}}{\sigma_j} \right) \right)} \right. \\
&\quad \left. \times \exp \left\{ - \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j \right)^2}{2\sigma_j^2 (n-j+\kappa_j)} \right] \right\} + \frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1}) + \kappa_j \mu_j}{n-j+\kappa_j} \right\} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

4.3 Hasil Prediksi IBNR untuk Bayesian *Chain Ladder* dengan Asumsi Log-Normal

Metode ini menggunakan data yang sama seperti pada Subbab 3.3, yaitu data klaim asuransi CTP pada laporan tahunan APRA. Telah dibahas pada Subbab 4.1, data klaim kumulatif pada Tabel 3.2 ditransformasi menjadi data log klaim kumulatif dengan menerapkan logaritma pada setiap entri dari data klaim kumulatif, yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.1. Transformasi tersebut juga berpengaruh terhadap hubungan pada persamaan (2.3). Dengan menerapkan logaritma pada kedua sisi persamaan (2.3) dan menggunakan pemisalan pada asumsi B3, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_{i,j} &= \begin{cases} \hat{f}_j \cdot S_{i,j-1}, & j = n - i + 1; \\ \hat{f}_j \cdot \hat{S}_{i,j-1}, & j > n - i + 1, \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \log(\hat{S}_{i,j}) &= \begin{cases} \log(\hat{f}_j \cdot S_{i,j-1}), & j = n - i + 1; \\ \log(\hat{f}_j \cdot \hat{S}_{i,j-1}), & j > n - i + 1, \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \hat{D}_{i,j} &= \begin{cases} \hat{\lambda}_j + D_{i,j-1}, & j = n - i + 1; \\ \hat{\lambda}_j + \hat{D}_{i,j-1}, & j > n - i + 1. \end{cases} \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Tabel 4.1: Data log klaim kumulatif asuransi CTP (dalam jutaan dolar Australia)

Tahun Kejadian (i)	Tahun Penundaan (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2012	7,502	7,938	8,131	8,213	8,262	8,288	8,302	8,309	8,314	8,318
2013	7,495	7,916	8,095	8,170	8,201	8,226	8,239	8,248	8,255	
2014	7,523	7,956	8,121	8,175	8,212	8,227	8,240	8,251		
2015	7,592	8,010	8,188	8,254	8,266	8,280	8,293			
2016	7,565	8,024	8,204	8,258	8,292	8,319				
2017	7,634	8,073	8,223	8,274	8,307					
2018	7,677	8,120	8,269	8,341						
2019	7,566	7,995	8,171							
2020	7,471	7,914								
2021	7,410									

Future triangle pada data log klaim kumulatif dapat diisi dengan menggunakan hubungan pada persamaan (4.6), dengan *development factor* Bayesian (\hat{f}_j^{LN}) yang diperoleh dari persamaan (4.5). Namun, terdapat tiga parameter yang perlu ditentukan terlebih dahulu nilainya, yaitu μ_j , σ_j , dan κ_j . Pada kasus ini, nilai dari μ_j dapat diperoleh dengan menghitung rata-rata dari perubahan besaran log klaim kumulatif pada setiap tahun penundaan, yang dapat dituliskan sebagai

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} (D_{i,j} - D_{i,j-1})}{n - j},$$

untuk $j > 0$. Begitu juga dengan nilai dari σ_j untuk $0 < j \leq n - 2$ dapat diperoleh dengan menghitung simpangan baku dari perubahan besaran log klaim kumulatif pada setiap tahun penundaan yang bersesuaian, sedangkan untuk σ_{n-1} dapat diperoleh dengan menghitung simpangan

baku dari perubahan besaran log klaim kumulatif pada setiap tahun penundaan, yang dapat dituliskan sebagai

$$\sigma_j = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-j} [(D_{i,j} - D_{i,j-1}) - \mu_j]^2}{n-j}}, & 0 < j \leq n-2; \\ \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} [(D_{i,j} - D_{i,j-1}) - \mu_j]^2}{\sum_{j=1}^{n-1} n-j}}, & j = n-1. \end{cases}$$

Pemilihan μ_j dan σ_j tersebut didasarkan pada asumsi B3 yang mana keduanya merupakan parameter dari $D_{i,j} | D_{i,j-1}, \lambda_j$, yang artinya μ_j dan σ_j adalah rata-rata dan simpangan baku dari perubahan $D_{i,j-1}$ menjadi $D_{i,j}$. Selain itu, nilai μ_j dan σ_j pada kasus ini serupa dengan parameter μ dan σ pada distribusi normal, di mana data yang diobservasi merupakan data perubahan besaran log klaim kumulatif yang sesuai dengan nilai *development factor* pada persamaan (4.6). Permasalahan muncul ketika harus menentukan σ_{n-1} yang mana hanya tersedia satu observasi dan tidak bisa bernilai nol yang disebabkan oleh variansi dari distribusi *truncated* normal yang harus ada. Jika secara intuitif dipercaya bahwa dari tahun ke tahun perilaku data cukup serupa, khusus untuk $n-1$ nilainya dapat ditentukan berdasarkan seluruh data yang tersedia.

Perhatikan bahwa asumsi *prior* didasarkan pada fakta bahwa λ_j berperan seperti rata-rata populasi. Serupa dengan kasus distribusi normal, rata-rata sampel (yang biasa dilambangkan dengan \bar{x}) juga akan tetap berdistribusi *truncated* normal dengan variansinya adalah $\frac{\sigma^2}{n}$. Maka dari itu, cukup beralasan jika dipilih nilai κ_j adalah $n-j$ yang merupakan banyaknya data yang terlibat dalam penentuan μ_j dan σ_j .

Dengan menggunakan *development factor* Bayesian (\hat{f}_j^{LN}), data log klaim kumulatif dengan *future triangle* yang telah terisi dapat dilihat pada Tabel 4.2. Setelah *future triangle* terisi, data log klaim kumulatif pada Tabel 4.2 ditransformasi kembali menjadi data klaim kumulatif dengan cara menghitung nilai eksponensial untuk setiap entri dari data. Data klaim kumulatif hasil transformasi dan hasil perhitungan *outstanding claims* dengan menggunakan persamaan (2.4) tersaji pada Tabel 4.3. Jika *development factor* Bayesian untuk log-normal (\hat{f}_j^{LN}) dibandingkan dengan \hat{f}_j^{HN} , \hat{f}_j^M , dan \hat{f}_j^A seperti pada Tabel 4.4, dapat dilihat bahwa \hat{f}_j^{LN} memiliki penurunan yang lebih lambat dibandingkan \hat{f}_j^{HN} . Akan tetapi pada data ini, \hat{f}_j^{LN} memiliki penurunan yang hampir serupa dengan \hat{f}_j^M dan \hat{f}_j^A , kecuali pada tahun penundaan terakhirnya. Lonjakan nilai yang terjadi pada *development factor* Bayesian untuk log-normal (\hat{f}_j^{LN}) di tahun penundaan terakhir merupakan representasi dari penangkapan ketebalan ekor dari data.

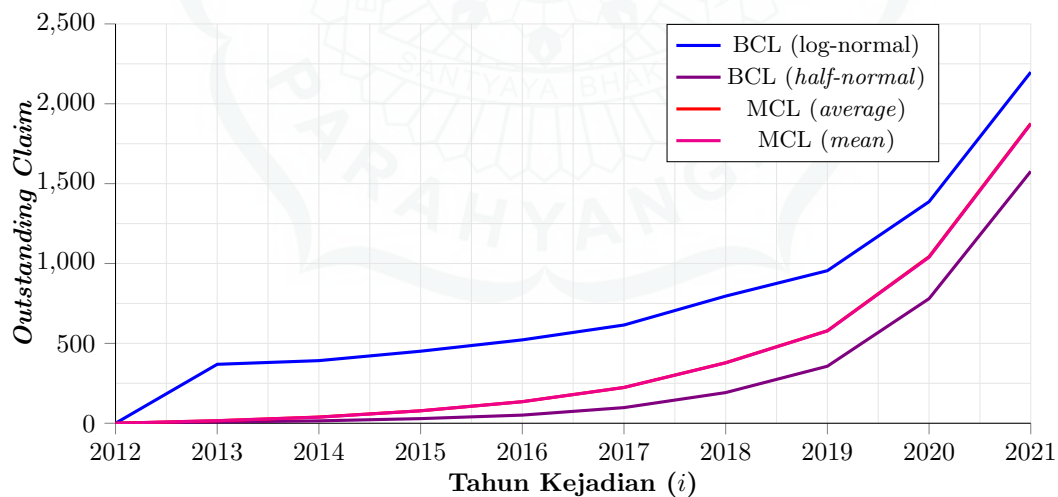
Perhatikan pada Gambar 4.1, nilai *outstanding claims* untuk Bayesian *Chain Ladder* (BCL) log-normal memiliki nilai yang paling besar pada setiap tahun kejadiannya dibandingkan nilai *outstanding claims* lainnya pada Tabel 3.7. Nilai yang besar tersebut disebabkan oleh lonjakan *development factor* Bayesian pada tahun penundaan terakhir yang telah dibahas sebelumnya, sehingga cocok digunakan pada data yang berekor tebal. Selain itu, nilai *outstanding claims* yang besar juga berpengaruh pada besarnya prediksi cadangan IBNR, yaitu sebesar 7.685 dalam jutaan dolar Australia. Pencadangan dana yang besar berguna untuk menghindari risiko gagal bayar akibat munculnya klaim bernilai ekstrem pada perusahaan apabila terjadi klaim dengan ekor tebal.

Tabel 4.2: Data *run-off triangle* log klaim kumulatif untuk Bayesian *Chain Ladder* (BCL) log-normal

Tahun Kejadian (<i>i</i>)	Tahun Penundaan (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2012	7,502	7,938	8,131	8,213	8,262	8,288	8,302	8,309	8,314	8,318
2013	7,495	7,916	8,095	8,170	8,201	8,226	8,239	8,248	8,255	8,346
2014	7,523	7,956	8,121	8,175	8,212	8,227	8,240	8,251	8,257	8,349
2015	7,592	8,010	8,188	8,254	8,266	8,280	8,293	8,303	8,309	8,400
2016	7,565	8,024	8,204	8,258	8,292	8,319	8,332	8,342	8,348	8,439
2017	7,634	8,073	8,223	8,274	8,307	8,329	8,342	8,351	8,357	8,449
2018	7,677	8,120	8,269	8,341	8,373	8,395	8,408	8,417	8,423	8,515
2019	7,566	7,995	8,171	8,236	8,269	8,290	8,303	8,313	8,319	8,410
2020	7,471	7,914	8,085	8,150	8,183	8,204	8,217	8,227	8,232	8,324
2021	7,410	7,846	8,017	8,082	8,115	8,136	8,149	8,159	8,164	8,256
<i>Development Factor</i>	\hat{f}_1^{LN}	\hat{f}_2^{LN}	\hat{f}_3^{LN}	\hat{f}_4^{LN}	\hat{f}_5^{LN}	\hat{f}_6^{LN}	\hat{f}_7^{LN}	\hat{f}_8^{LN}	\hat{f}_9^{LN}	
	0,43556	0,17129	0,06499	0,03271	0,02138	0,01296	0,00939	0,00586	0,09161	

Tabel 4.3: Data *run-off triangle* klaim kumulatif untuk Bayesian *Chain Ladder* (BCL) log-normal

Tahun Kejadian (<i>i</i>)	Tahun Penundaan (<i>j</i>)										<i>Outstanding Claims</i>
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2012	1.812	2.802	3.399	3.690	3.875	3.977	4.031	4.061	4.080	4.097	0
2013	1.799	2.740	3.277	3.535	3.646	3.736	3.784	3.819	3.846	4.215	369
2014	1.851	2.852	3.363	3.551	3.684	3.740	3.788	3.832	3.855	4.224	392
2015	1.982	3.012	3.599	3.843	3.891	3.946	3.997	4.035	4.058	4.448	451
2016	1.930	3.052	3.654	3.859	3.992	4.103	4.157	4.196	4.220	4.625	522
2017	2.067	3.206	3.727	3.921	4.054	4.142	4.196	4.235	4.260	4.669	615
2018	2.158	3.362	3.901	4.191	4.330	4.424	4.482	4.524	4.551	4.987	796
2019	1.932	2.967	3.538	3.776	3.901	3.985	4.037	4.076	4.099	4.493	955
2020	1.756	2.735	3.246	3.464	3.579	3.656	3.704	3.739	3.761	4.122	1387
2021	1.653	2.555	3.033	3.236	3.344	3.416	3.461	3.493	3.514	3.851	2198
<i>Development Factor</i>	\hat{f}_1^{LN}	\hat{f}_2^{LN}	\hat{f}_3^{LN}	\hat{f}_4^{LN}	\hat{f}_5^{LN}	\hat{f}_6^{LN}	\hat{f}_7^{LN}	\hat{f}_8^{LN}	\hat{f}_9^{LN}	IBNR 7.685	
	1,54583	1,18683	1,06715	1,03325	1,02161	1,01305	1,00943	1,00587	1,09593		

Gambar 4.1: Grafik perbandingan nilai *outstanding claims* untuk log-normal

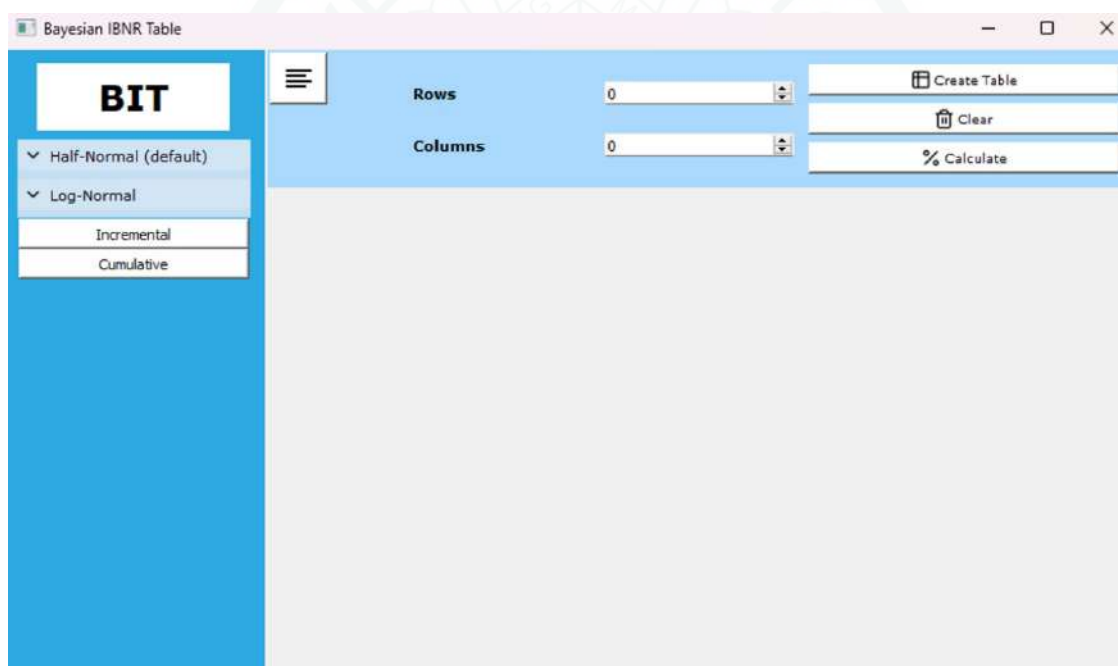
4.4 Demonstrasi BIT untuk *Run-Off Triangle* Log-Normal

Menggunakan aplikasi yang sama seperti pada bagian 3.4, metode Bayesian *Chain Ladder* dengan asumsi log-normal dapat digunakan dengan mengklik seksi “Log-Normal”, sehingga tampilan yang dilihat akan seperti pada Gambar 4.2. Demonstrasi ini akan memberi contoh cara penggunaan BIT

Tabel 4.4: Perbandingan *development factor* Bayesian untuk *log-normal*

j	\hat{f}_j^{LN}	\hat{f}_j^{HN}	\hat{f}_j^M	\hat{f}_j^A
1	1,54583	1,52027	1,54613	1,54594
2	1,18683	1,16744	1,18610	1,18695
3	1,06715	1,05261	1,06701	1,06722
4	1,03325	1,02112	1,03317	1,03331
5	1,02161	1,01179	1,02169	1,02163
6	1,01305	1,00507	1,01305	1,01305
7	1,00943	1,00332	1,00939	1,00944
8	1,00587	1,00176	1,00584	1,00587
9	1,09593	1,00213	1,00417	1,00417

pada data *run-off triangle* kumulatif dengan kondisi yang sama, di mana tanda pemisah desimal adalah tanda titik (.), bukan tanda koma (,). Langkah pertama, pilih subseksi “Cumulative” pada seksi “Log-Normal”. Kemudian, isi jumlah baris dari data *run-off triangle* log-normal pada bagian isian “Rows” dan jumlah kolom pada bagian isian “Columns”, lalu klik tombol “Create Table” untuk membuat tabelnya. Masukkan data *run-off triangle* log-normal pada tabel yang telah dibuat. Contoh masukan dari data *run-off triangle* log-normal dapat dilihat pada Gambar 4.3.



Gambar 4.2: Contoh tampilan seksi log-normal

Setelah semuanya terisi, klik tombol "Calculate" untuk menghitung hasil prediksi cadangan IBNR. Contoh tampilan hasil perhitungan IBNR dapat dilihat pada Gambar 4.4. Perhitungan data *run-off triangle* inkremental dapat dilakukan dengan langkah yang serupa.

The screenshot shows the 'Bayesian IBNR Table' application. On the left, there is a sidebar with the title 'BIT' and two expandable sections: 'Half-Normal (default)' and 'Log-Normal'. Under 'Log-Normal', there are two buttons: 'Incremental' and 'Cumulative'. The main area has 'Rows' and 'Columns' both set to 10. There are buttons for 'Create Table', 'Clear', and 'Calculate'. The central table contains the following data:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1812	2802	3399	3690	3875	3977	4031	4061	4080	4097
2	1799	2740	3277	3535	3646	3736	3784	3819	3846	
3	1851	2852	3363	3551	3684	3740	3788	3832		
4	1982	3012	3599	3843	3891	3946	3997			
5	1930	3052	3654	3859	3992	4103				
6	2067	3206	3727	3921	4054					
7	2158	3362	3901	4191						
8	1932	2967	3538							
9	1756	2735								
10	1653									

Gambar 4.3: Contoh masukan data *run-off triangle* log-normal kumulatif

The screenshot shows the same 'Bayesian IBNR Table' application after calculation. The table now contains the following results:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1811.999...	2801.999...	3398.99...	3689.99...	3875.000...	3976.999...	4031.000...	4061.000...	4080.0	4097.000...
2	1799.000...	2739.999...	3277.00...	3535.00...	3646.0	3736.000...	3783.999...	3818.999...	3846.00...	4214.957...
3	1850.999...	2852.000...	3363.00...	3550.99...	3683.999...	3740.000...	3787.999...	3832.0	3854.50...	4224.281...
4	1982.000...	3011.999...	3599.00...	3843.0	3891.000...	3945.999...	3996.999...	4034.709...	4058.40...	4447.742...
5	1930.000...	3052.0	3653.99...	3859.00...	3991.999...	4102.999...	4156.528...	4195.742...	4220.38...	4625.260...
6	2066.999...	3205.999...	3727.0	3920.99...	4054.000...	4141.620...	4195.652...	4235.236...	4260.11...	4668.797...
7	2158.0	3362.000...	3900.99...	4190.99...	4330.354...	4423.948...	4481.664...	4523.945...	4550.51...	4987.061...
8	1931.999...	2966.999...	3537.99...	3775.58...	3901.128...	3985.444...	4037.439...	4075.530...	4099.46...	4492.742...
9	1756.000...	2735.0	3245.98...	3463.95...	3579.139...	3656.497...	3704.200...	3739.147...	3761.10...	4121.923...
10	1652.999...	2555.262...	3032.66...	3236.31...	3343.927...	3416.200...	3460.769...	3493.419...	3513.93...	3851.040...

Cadangan IBNR: 7684.806895881235

Gambar 4.4: Contoh hasil perhitungan menggunakan program dengan asumsi log-normal

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dalam metode Bayesian *Chain Ladder*, statistika Bayesian dapat diterapkan pada metode *Chain Ladder* melalui *development factor*-nya. Jika data *run-off triangle* diasumsikan berdistribusi *half-normal*, *prior* dari kuadrat *development factor* Bayesiannya diasumsikan berdistribusi invers-gamma. Dengan demikian, distribusi *posterior* dari kuadrat *development factor*-nya didapatkan berdistribusi invers-gamma juga dengan parameter bentuknya bergantung pada banyaknya data pada tahun penundaan tersebut, sedangkan parameter skalanya bergantung pada rasio kuadrat antara klaim kumulatif tahun penundaan sekarang dengan tahun penundaan sebelumnya. Di sisi lain, untuk data *run-off triangle* yang diasumsikan berdistribusi *log-normal*, data klaim kumulatif terlebih dahulu ditransformasi menjadi data log klaim kumulatif dengan menerapkan logaritma pada setiap entri dari data klaim kumulatif. *Prior* dari *development factor*-nya akan berdistribusi *truncated normal*, begitu juga dengan distribusi *posterior*-nya yang juga berdistribusi *truncated normal* dengan parameter bentuknya bergantung pada selisih log kumulatif dan banyaknya data, sementara parameter skalanya hanya bergantung pada banyaknya data.

Dengan menggunakan data *run-off triangle* dari laporan tahunan *Australian Prudential Regulation Authority* (APRA) khususnya pada data klaim asuransi *compulsory third party* (CTP) dari tahun 2012 sampai 2021, diperoleh empat hasil prediksi cadangan IBNR dengan metode yang berbeda-beda. Menggunakan metode Mack *Chain Ladder* (*mean*), hasil prediksi cadangan IBNR yang diperoleh sebesar 4.359 dalam jutaan dolar Australia, sedangkan untuk metode Mack *Chain Ladder* (*average*) sebesar 4.369 dalam jutaan dolar Australia yang mana kedua hasil ini hampir serupa. Selanjutnya, menggunakan metode Bayesian *Chain Ladder*, untuk asumsi model data berdistribusi *half-normal*, hasil prediksi cadangan IBNR yang diperoleh sebesar 3.107 dalam jutaan dolar Australia, sedangkan untuk asumsi model data berdistribusi *log-normal* hasil prediksi cadangan IBNR yang diperoleh sebesar 7.035 dalam jutaan dolar Australia. Dengan menetapkan hasil dari metode Mack *Chain Ladder* *mean* dan *average* sebagai acuan, dapat dilihat bahwa metode Bayesian *Chain Ladder* dengan asumsi *half-normal*, yakni sebuah distribusi yang berekor tipis, memiliki hasil prediksi yang lebih kecil, sedangkan untuk asumsi *log-normal*, yakni sebuah distribusi yang berekor tebal, memiliki hasil yang lebih besar. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa hasil prediksi tersebut mengikuti sifat ekor distribusi dari asumsi model data itu sendiri, sehingga dengan menggunakan asumsi model data yang tepat, hasil prediksi akan jauh lebih cocok dan sesuai kebutuhan.

5.2 Saran

Tentunya penelitian ini belum sempurna, terutama dalam hal penentuan *hyperparameter* α_j , β_j , μ_j , σ_j , dan κ_j . Seperti terlihat pada penjelasan pada Subbab 3.3 dan 4.3, penentuan *hyperparameter* tersebut dilakukan secara intuitif. Dalam statistika Bayesian, pada dasarnya nilai *hyperparameter* tidak begitu berpengaruh ketika ukuran sampel besar, yang mana hal tersebut tidak terpenuhi dalam data *run-off triangle*. Karena itu, penentuan nilai *hyperparameter* secara lebih matematis, seperti Bayesian nonparametrik atau Bayesian hierarki, dapat dijadikan pengembangan untuk penelitian selanjutnya.



DAFTAR REFERENSI

- [1] Brown, R. L. dan Lennox, W. S. (2015) *Introduction to Ratemaking and Loss Reserving for Property and Casualty Insurance*, 4th edition. ACTEX Publications, New Hartford.
- [2] Fauzi, R. R. dan Stevanlim, J. J. (2024) Bayesian chain ladder for cumulative run-off triangle under half-normal distribution assumption. *arXiv preprint arXiv:2402.16917*.
- [3] Bolstad, W. M. dan Curran, J. M. (2017) *Introduction to Bayesian Statistics*, 3rd edition. John Wiley and Sons, Inc., USA.
- [4] Mack, T. (1993) Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *ASTIN Bulletin*, **23(2)**, 213–225.
- [5] Arifani, N., Nurrohmah, S., dan Fithrian, I. (2022) Metode Bayesian Chain Ladder untuk Memprediksi Cadangan Klaim. *Jurnal Statistika dan Aplikasinya*, **6(1)**, 120–129.
- [6] Klugman, S., Panjer, H., dan Willmot, G. (2019) *Loss Models from Data to Decisions*, 5th edition. John Wiley and Sons, Inc., USA.
- [7] Novita, M., Triana, S., dan Sari, S. F. (2018) Mean squared error metode Chain Ladder, Bornhuetter-Ferguson, dan Benktander dalam prediksi cadangan klaim asuransi umum. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, **2(2)**, 93–100.
- [8] England, P. D. dan Verrall, R. J. (2002) Stochastic Claims Reserving in General Insurance. *British Actuarial Journal*, **8(3)**, 443–544.
- [9] Hogg, R. V., McKean, J. W., dan Craig, A. T. (2019) *Introduction to Mathematical Statistics*, 8th edition. Pearson, USA.