



UNIVERSITAS INDONESIA

**PEMODELAN TINGKAT MORTALITAS INDONESIA
MENGUNAKAN MODEL CBDX**

SKRIPSI

MUHAMMAD ALANNA DAFFA RAMADHANI

2006526062

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM STUDI SARJANA ILMU AKTUARIA

DEPOK

JUNI 2024



UNIVERSITAS INDONESIA

**PEMODELAN TINGKAT MORTALITAS INDONESIA
MENGUNAKAN MODEL CBDX**

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Aktuaria

MUHAMMAD ALANNA DAFFA RAMADHANI

2006526062

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA ILMU AKTUARIA
DEPOK
JUNI 2024**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Muhammad Alanna Daffa Ramadhani
NPM : 2006526062
Tanda Tangan : 
Tanggal : 15 Juni 2024

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh

Nama : Muhammad Alanna Daffa Ramadhani
NPM : 2006526062
Program Studi : Ilmu Aktuaria
Judul Skripsi : Pemodelan Tingkat Mortalitas Indonesia Menggunakan Model CBDX

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Aktuaria pada Program Studi Ilmu Aktuaria, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Sindy Devila, M.Si. ()

Penguji : Dr. rer. nat. Hendri Murfi, S.Si., M.Kom. ()

Penguji : Dr. Suci Fratama Sari, S.Si., M.Si. ()

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 15 Juni 2024

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan untuk memperoleh gelar Sarjana Aktuaria pada program studi Ilmu Aktuaria, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia. Selama menyelesaikan skripsi ini, penulis telah mendapatkan banyak bantuan serta dukungan dari beberapa pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ibu Sindy Devila, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing pertama penulis yang sudah meluangkan waktu, tenaga, pikiran, dukungan, dan nasihat selama membimbing penulis untuk menyusun skripsi ini. Terima kasih banyak karena Ibu senantiasa memberikan masukan dan semangat kepada penulis sepanjang masa penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Maulana Malik, S.Si., M.Si., Ph. D. selaku pembimbing akademis penulis yang telah memberikan ilmu, arahan, dan nasihat selama masa perkuliahan penulis. Terima kasih karena Bapak senantiasa membersamai dan memberikan wejangan, khususnya terkait permasalahan akademik, kepada penulis.
3. Bapak Dr. rer. nat. Hendri Murfi, S.Si., M.Kom. dan Ibu Dr. Suci Fratama Sari, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji sidang skripsi penulis yang telah bersedia meluangkan waktu serta memberikan kritik dan saran yang membangun untuk skripsi ini
4. Seluruh dosen pengajar dan staf Departemen Matematika FMIPA UI yang telah memberikan ilmu serta wawasan, membimbing, dan memberikan kontribusi baik secara langsung maupun tidak langsung selama masa perkuliahan penulis.
5. Kedua orang tua saya yang senantiasa menemani, merawat, membantu, serta memberikan doa, kasih sayang, semangat, dan dukungan kepada penulis dalam segala upaya yang dijalankan selama ini.

6. Pengurus Inti PDM 2022, yaitu Ananda, Annisa, Petra, Sekar, dan Abiel. Terima kasih banyak untuk segala pelajaran, hiburan, candaan, semangat, dan dukungan yang telah diberikan kepada penulis.
7. Pengurus Inti BEM FMIPA UI 2023, yaitu Ammar, Etang, Andien, Fina, Fia, Salsana, Putri, Itang, dan Ruben. Terima kasih banyak untuk segala pelajaran, hiburan, candaan, semangat, dan dukungan yang telah diberikan kepada penulis. Terima kasih telah menemani tahun akhir kehidupan perkuliahan penulis.
8. Seluruh teman-teman HORI20NTAL yang sudah menjadi teman penulis selama menjalani kehidupan perkuliahan ini.
9. Teman-teman grup FPP yang menjadi peer terbaik dalam menjalani kehidupan perkuliahan ini. Karena kalian lah kuliah ini menjadi menantang dan menyenangkan.
10. Kedua adik asuh saya, Matthew dan Adellyne. Terima kasih banyak dan juga semangat untuk kalian berdua dalam menjalani kehidupan perkuliahan kedepan.
11. Asosiasi Asuransi Jiwa Indonesia atas bantuan dan dukungannya dalam penelitian ini

Akhir kata, penulis meminta maaf apabila terdapat kekurangan dan kesalahan dalam penulisan. Semoga Tuhan Yang Maha Esa senantiasa menyertai dan membalas perbuatan baik segala pihak yang telah membantu penulis. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan dapat menginisiasi penelitian lebih lanjut untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Wassalamu'alaikum

Depok, 15 Juni 2024

Muhammad Alanna Daffa Ramadhani

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Alanna Daffa Ramadhani
NPM : 2006526062
Program Studi : Ilmu Aktuaria
Fakultas : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

**PEMODELAN TINGKAT MORTALITAS INDONESIA MENGGUNAKAN
MODEL CBDX**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di: Depok
Pada tanggal: 15 Juni 2024
Yang menyatakan



(Muhammad Alanna Daffa Ramadhani)

ABSTRAK

Nama : Muhammad Alanna Daffa Ramadhani

Program Studi : Ilmu Aktuaria

Judul : Pemodelan Tingkat Mortalitas Indonesia Menggunakan Model CBDX

Pembimbing : Sindy Devila, M.Si.

Indonesia merupakan salah satu negara dengan populasi terbesar di dunia, mencapai 275.501.339 jiwa pada akhir tahun 2022. Pertumbuhan populasi ini menghadirkan peluang dan tantangan bagi perkembangan ekonomi Indonesia. Mortalitas, sebagai faktor fundamental dalam pertumbuhan populasi, mempengaruhi jumlah penduduk dan struktur umur populasi. Oleh karena itu, perhitungan tingkat mortalitas yang akurat sangat penting bagi pemerintah dan industri asuransi dalam merencanakan kebijakan kesehatan dan keuangan. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan tingkat mortalitas di Indonesia menggunakan Model CBDX, sebuah model stokastik yang memperhitungkan efek usia, periode, dan kohort. Data yang digunakan adalah data tingkat kematian pusat (*Central Death Rate*) Indonesia dari tahun 1950 hingga 2021, mencakup rentang usia 0 hingga 90 tahun. Metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter model adalah *Sequential Maximum Likelihood* dan metode numerik Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Pemodelan tingkat mortalitas dilakukan dalam dua skenario: tanpa pengelompokan usia dan dengan pengelompokan usia berdasarkan rekomendasi dari *World Health Organization* (WHO). Hasil penelitian menunjukkan bahwa model CBDX dapat memodelkan tingkat mortalitas di Indonesia dengan baik, terutama pada kelompok usia dewasa, dengan nilai *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) di bawah 10%, yang sesuai dengan tujuan model CBDX untuk mencakup rentang usia dewasa yang lebih luas. Model ini dapat digunakan oleh pemerintah dan industri asuransi untuk memprediksi tingkat kematian dan merencanakan kebijakan kesehatan serta keuangan yang lebih baik.

Kata Kunci: BFGS, Kohort , MAPE, Periode, Sequential Maximum Likelihood, Usia

ABSTRACT

Name : Muhammad Alanna Daffa Ramadhani
Study Program : Actuarial Science
Title : Modelling Indonesian Mortality Rate Using CBDX Model
Counsellor : Sindy Devila, M.Si.

Indonesia is one of the most populous countries in the world, with a population reaching 275,501,339 by the end of 2022. This population growth presents both opportunities and challenges for Indonesia's economic development. Mortality, as a fundamental factor in population growth, affects the number and age structure of the population. Therefore, accurate calculation of mortality rates is crucial for the government and the insurance industry in planning health and financial policies. This research aims to model mortality rates in Indonesia using the CBDX Model, a stochastic model that accounts for age, period, and cohort effects. The data used is the Central Death Rate data of Indonesia from 1950 to 2021, covering age ranges from 0 to 90 years. The methods used to estimate the model parameters are Sequential Maximum Likelihood and the Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) numerical method. Mortality rate modeling is conducted in two scenarios: without age grouping and with age grouping based on recommendations from the World Health Organization (WHO). The results of the study indicate that the CBDX model can effectively model mortality rates in Indonesia, particularly for the adult age group, with a Mean Absolute Percentage Error (MAPE) below 10%, aligning with the CBDX model's objective to cover a broader adult age range. This model can be utilized by the government and the insurance industry to predict mortality rates and to plan better health and financial policies.

Key words: Age, BFGS, Cohort, MAPE, Period, Sequential Maximum Likelihood

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR.....	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH	vi
ABSTRAK	1
ABSTRACT	2
DAFTAR ISI	3
DAFTAR GAMBAR.....	6
DAFTAR TABEL	7
DAFTAR LAMPIRAN	8
BAB 1 PENDAHULUAN.....	9
1.1. Latar Belakang.....	9
1.2. Rumusan Permasalahan	12
1.3. Tujuan Penelitian	12
1.4. Metodologi Penelitian.....	13
1.5. Batasan Permasalahan	13
BAB 2 LANDASAN TEORI	14
2.1. Variabel Acak Waktu Hidup Masa Depan	14
2.1.1. Fungsi Distribusi dari T_x	15
2.1.2. Fungsi Survival dari T_x	15
2.1.3. Fungsi Densitas dari T_x	16
2.2. Tabel Mortalitas.....	16
2.2.1. Tabel Mortalitas	16

2.2.2. Hubungan antara Kuantitas Tabel Mortalitas dengan Kuantitas Distribusi Tx	17
2.3. Ukuran Mortalitas	18
2.3.1. Force of Mortality	18
2.3.2. Central Death Rate	19
2.4. General Procedure	20
2.5. Age-Period-Cohort Model	23
2.6. Distribusi Poisson	24
2.7. Metode Estimasi Maximum Likelihood	25
2.8. Metode Iterasi Newton-Raphson	26
2.9. Metode Quasi Newton	27
2.10. Metode Random Walk with Drift	28
2.11. Mean Absolute Percentage Error	29
BAB 3 MODEL CBDX UNTUK TINGKAT MORTALITAS	31
3.1. Model CBDX.....	31
3.2. Estimasi Nilai Parameter $\alpha(x)$, $\kappa(t)$, dan $\gamma(c)$	32
3.2.2. Langkah 1: Estimasi efek usia $\alpha(x)$	34
3.2.3. Langkah 2: Estimasi efek periode $\kappa(t)$	36
3.2.4. Langkah 3: Estimasi efek kohort $\gamma(c)$	40
3.3. Evaluasi Model CBDX	42
3.4. Peramalan Tingkat Mortalitas menggunakan Model CBDX.....	43
BAB 4 APLIKASI DATA.....	44
4.1. Data <i>Central Death Rate</i> Indonesia	44
4.2. Estimasi Parameter Model CBDX dan Hasil Evaluasinya	45
4.2.1. Estimasi Parameter Model CBDX pada Skenario 1	46
4.2.2. Estimasi Parameter Model CBDX pada Skenario 2	53

4.3. Perbandingan Performa Model CBDX dalam Mengestimasi Tingkat Mortalitas	64
4.4. Perhitungan Tingkat Mortalitas Indonesia.....	66
4.5. Peramalan Tingkat Mortalitas Indonesia	71
4.5.1. Peramalan nilai kit	72
4.5.2. Peramalan nilai $n mx, t$ dan $n qx, t$ Penduduk Indonesia	73
BAB 5 PENUTUP.....	76
5.1. Kesimpulan.....	76
5.2. Saran	77
DAFTAR PUSTAKA.....	78
LAMPIRAN	81

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1. Flow Chart algoritma Sequential Maximum Likelihood.....	33
Gambar 4.1. Visualisasi dari Estimasi Nilai $\alpha(x)$ untuk Seluruh Usia pada Skenario 147	
Gambar 4.2. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, κ_3t pada Skenario 1.....	48
Gambar 4.3. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ pada Skenario 1	48
Gambar 4.4. Nilai $n_{mx,t}$ Aktual dan Nilai $n_{mx,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia pada Tahun 2020 pada Skenario 1	51
Gambar 4.5. Nilai $n_{mx,t}$ Aktual dan Nilai $n_{mx,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia pada Usia 20 Tahun dan 75 Tahun pada Skenario 1	51
Gambar 4.6. Visualisasi dari Estimasi Nilai $\alpha(x)$ untuk Seluruh Usia pada Skenario 255	
Gambar 4.7. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, κ_3t untuk Kelompok Usia 0 &1 pada Skenario 2	55
Gambar 4.8. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 0 &1 pada Skenario 2	56
Gambar 4.9. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, κ_3t untuk Kelompok Usia 5, 10, dan 15 pada Skenario 2.....	56
Gambar 4.10. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 5, 10, dan 15 pada Skenario 2	57
Gambar 4.11. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, κ_3t untuk Kelompok Usia 20, 25, 30, dan 35 pada Skenario 2.....	57
Gambar 4.12. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 20, 25, 30, dan 35 pada Skenario 2	58
Gambar 4.13. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, κ_3t untuk Kelompok Usia 40, 45, 50, 55, dan 60 pada Skenario 2.....	58
Gambar 4.14. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 40, 45, 50, 55, dan 60 pada Skenario 2.....	59
Gambar 4.15. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, κ_3t untuk Kelompok Usia 65 sampai 90 Tahun pada Skenario 2.....	59
Gambar 4.16. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 65 sampai 90 Tahun pada Skenario 2	60
Gambar 4.17. Nilai $n_{mx,t}$ Aktual dan Nilai $n_{mx,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia pada Tahun 2020 pada Skenario 2.....	62
Gambar 4.18. Nilai $n_{mx,t}$ Aktual dan Nilai $n_{mx,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia Pada Usia 35 dan 80 Tahun pada Skenario 2	62
Gambar 4.19. Nilai $n_{qx,t}$ Aktual dan Nilai $n_{qx,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia pada Tahun 2020	69
Gambar 4.20. Nilai $n_{qx,t}$ Aktual dan Nilai $n_{qx,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia Pada Usia 35 dan 70 Tahun pada Skenario 2	69
Gambar 4.21. Alur Pengaplikasian Data untuk Memodelkan Tingkat Kematian	71

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1. Data $n_{mx,t}$ Indonesia.....	45
Tabel 4.2. Nilai Estimasi $n_{mt,x}$ Penduduk Indonesia pada Skenario 1.....	49
Tabel 4.3. MAPE dari Hasil Estimasi nilai $n_{mx,t}$ pada Skenario 1 untuk Penduduk Indonesia.....	52
Tabel 4.4. Pembagian na , ny , dan nc per Kelompok Usia.....	53
Tabel 4.5. Nilai Estimasi $n_{mt,x}$ Penduduk Indonesia pada Skenario 2.....	61
Tabel 4.6. MAPE dari Hasil Estimasi nilai mt,x pada Skenario 2 untuk Penduduk Indonesia.....	63
Tabel 4.7. Nilai $n_{qt,x}$ Aktual Penduduk Indonesia.....	66
Tabel 4.8. Nilai $n_{qt,x}$ Penduduk Indonesia Berdasarkan Nilai $n_{mt,x}$ pada Skenario 2	67
Tabel 4.9. MAPE dari Hasil Estimasi nilai $n_{qx,t}$ pada Skenario 2 untuk Penduduk Indonesia.....	69

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Kode Pemrograman.....	81
Lampiran 2. Data $n_{mx,t}$ Aktual Penduduk Indonesia	101
Lampiran 3. Nilai Estimasi Parameter $\alpha(x)$, $\kappa(t)$, dan $\gamma(c)$ Pada Skenario 2	110
Lampiran 4. Data Estimasi $n_{mx,t}$ Penduduk Indonesia Pada Skenario 2	118
Lampiran 5. Data Estimasi $n_{qx,t}$ Penduduk Indonesia	128

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Indonesia merupakan salah satu penyumbang populasi terbesar dunia dengan jumlah populasi sebesar 275.501.339 jiwa, yang terdiri dari jumlah penduduk laki-laki sebesar 138.703.277 jiwa dan jumlah penduduk perempuan sebesar 136.798.063 jiwa pada akhir tahun 2022 (The World Bank IBRD-IDA, 2022). Jumlah ini menyumbang sebesar 3,5% dari total populasi dunia. Jumlah penduduk di Indonesia juga selalu bertambah dari waktu ke waktu dengan tingkat pertumbuhan sebesar 0,6% pada akhir tahun 2022 (The World Bank IBRD-IDA, 2022). Hal ini tentunya menjadi peluang serta tantangan bagi Indonesia dalam pertumbuhan ekonominya. Pertumbuhan penduduk juga memiliki hubungan yang positif dengan pertumbuhan ekonomi dimana pertumbuhan penduduk yang tinggi akan menghasilkan “stok pengetahuan yang bermanfaat” untuk mendorong pertumbuhan ekonomi yang lebih besar (Rothman, 1992).

Pertumbuhan penduduk di suatu negara didasari oleh tiga hal, yaitu fertilitas, mortalitas, dan migrasi (Mantra & Bagus, 2009). Mortalitas sebagai salah satu dari tiga faktor mendasar pertumbuhan penduduk, memiliki pengaruh pada jumlah penduduk serta struktur umur suatu populasi. Mortalitas atau jumlah kematian suatu populasi pada suatu daerah memiliki kaitan yang erat dengan kualitas tingkat kesehatan masyarakat yang secara berkesinambungan mempengaruhi kualitas pembangunan ekonomi pada daerah tersebut. Mortalitas yang menjadi salah satu pilar mendasar dalam pertumbuhan penduduk suatu negara termasuk Indonesia, perlu diperhatikan dan dikaji secara mendalam oleh pemerintah.

Dickson et al. (2009) mendefinisikan tingkat mortalitas sebagai suatu probabilitas dimana seseorang meninggal pada suatu periode tertentu. Tingkat mortalitas mengkuantifikasi jumlah beberapa kematian per ukuran suatu populasi yang terpapar risiko kematian (Syuhada & Hakim, 2021). Berangkat dari kedua definisi tersebut dapat disimpulkan bahwasannya tingkat mortalitas mengukur jumlah kematian suatu populasi pada periode yang spesifik. Tingkat mortalitas penduduk merupakan suatu hal yang patut diperhatikan

karena akan memiliki dampak kepada pertumbuhan ekonomi yang bersinggungan dengan hampir seluruh sendi-sendi ekonomi yang ada di Indonesia. Bagi pemerintah, khususnya pada aspek kesehatan, tingkat mortalitas juga menjadi indikator kualitas kesehatan suatu penduduk pada daerah tersebut dimana rendahnya tingkat mortalitas berbanding lurus dengan kualitas kesehatan pada daerah tersebut. Tingkat mortalitas tidak hanya menunjukkan kondisi dari kualitas kesehatan suatu negara tetapi ia juga merefleksikan kondisi sosial dan bagaimana pertumbuhan ekonomi dari negara tersebut, dimana kedua hal ini saling berhubungan (Kanchan et al., 2016).

Dalam penerapannya pada ilmu aktuaria, mortalitas menjadi suatu pertimbangan yang penting dalam manajemen risiko aktuaria untuk polis asuransi jiwa, produk anuitas, dan rencana pensiun serta variabel fundamental dalam penetapan harga dan penilaian (Kwon & Nguyen, 2019). Tingkat mortalitas adalah komponen utama dari penetapan harga dan penyediaan cadangan produk asuransi jiwa dan anuitas yang disediakan oleh perusahaan asuransi jiwa dan asuransi sosial yang disediakan oleh pemerintah (Tsai & Kim, 2022). Berangkat dari pernyataan di atas maka dapat diambil kesimpulan bahwasannya tingkat mortalitas menjadi hal yang sangat mendasar bagi industri asuransi dalam menjalankan kegiatan bisnisnya. Kesehatan keuangan perusahaan asuransi jiwa dipengaruhi oleh proyeksi yang akurat dan harga premi untuk risiko kematian (Harris et al., 2021). Maka dari itu tingkat mortalitas atau risiko kematian menjadi suatu hal yang perlu dikaji dan dihitung secara komprehensif karena tingkat mortalitas menjadi acuan bagi suatu perusahaan asuransi dalam penetapan harga suatu produk asuransi serta menjadi indikator kesehatan keuangan perusahaan asuransi tersebut.

Penelitian terkait tingkat mortalitas memiliki sejarah yang sangat panjang, dan sudah diamati oleh berbagai ilmuwan dari seluruh penjuru dunia dimulai dari Gompertz yang mempublikasikan hukum mortalitasnya pada tahun 1825. Pada beberapa dekade sebelumnya, pemodelan tingkat mortalitas masih relatif sederhana dan masih banyak melibatkan penilaian subjektif dalam mengukur tingkat mortalitas. Sedangkan saat ini para aktuaris dan demografer mulai menggunakan pendekatan metode statistik berupa model stokastik.

Pemodelan suatu tingkat mortalitas menggunakan pendekatan statistik berupa model stokastik terus berkembang sampai saat ini. Salah satu penggunaan metode stokastik yang

dikenal secara luas adalah Model Lee-Carter (1992). Model Lee-Carter merupakan suatu teknik peramalan tingkat mortalitas yang mengintegrasikan aspek demografis dengan model *time series*. Proses peramalan dalam Model Lee-Carter dilakukan dengan mengekstrapolasikan indeks mortalitas melalui pilihan model *time series* yang akurat. Pengembangan pada model ini telah dilakukan oleh beberapa peneliti seperti Lee-Miller (2001), Booth et al. (2002), dan Renshaw-Haberman (2006).

Selain Model Lee-Carter terdapat pula suatu model yang umum digunakan secara luas yaitu Model Cairns-Blake-Dowd yang diperkenalkan pada 2006. Model Cairns-Blake-Dowd (CBD) merupakan suatu model stokastik dengan parameter yang bervariasi berdasarkan waktu untuk memodelkan tingkat mortalitas. Model ini kemudian dinamakan ulang sebagai Model M5 pada pengklasifikasian oleh Cairns (Cairns et al., 2009). Pada pengembangannya terdapat turunan ataupun modifikasi dari model M5 seperti model M6 yang diperkenalkan pada tahun 2009 dengan menambahkan efek kohort pada model ini dan model M7 yang merupakan pengembangan dari model M6 dengan adanya penambahan *age-specific quadratic term* dari model M6 (Cairns et al., 2009).

Kemudian pada tahun 2020 Cairns, Blake, Dowd kembali mengembangkan model M5 yang menghasilkan model CBDX. Model CBDX memiliki parameter usia, satu sampai tiga efek periode dan parameter kohort (Dowd et al., 2020). Model CBDX ini memiliki tujuan untuk memodelkan mortalitas pada kelompok usia dewasa dalam rentang usia yang lebih luas daripada pengembangan model CBD sebelumnya (Dowd et al., 2020). Dalam perumusannya, Model CBDX mengikuti aturan *General Procedure* (GP) yang diajukan oleh Hunt & Blake (2014a). GP mengidentifikasi setiap fitur demografis yang signifikan dalam data mortalitas secara berurutan dimulai dari yang terpenting. GP secara khusus mencegah adanya kesalahan pengalokasian seperti efek usia periode dialokasikan secara keliru kepada efek kohort (Hunt & Blake, 2014a). Dengan menerapkan GP maka dimungkinkan untuk mengonstruksi suatu model mortalitas dengan parameter yang ekonomis untuk menangkap secara akurat seluruh informasi yang signifikan yang ada dalam usia, periode, serta kohort dari data (Dowd et al., 2020).

Model CBDX sudah diterapkan untuk memodelkan tingkat mortalitas pada data penduduk negara Inggris dan Wales (Dowd et al., 2020). Namun belum ada peneliti yang melakukan penelitian terkait penggunaan model CBDX dalam memodelkan tingkat

mortalitas di Indonesia. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas tentang pemodelan tingkat mortalitas di Indonesia menggunakan model CBDX. Dimulai dengan penjelasan model CBDX itu sendiri kemudian proses estimasi parameter model CBDX dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*. Parameter model CBDX ini akan diestimasi secara satu persatu secara sekuensial menggunakan algoritma *Sequential Maximum Likelihood* dan untuk beberapa parameter solusi numeriknya diperoleh melalui metode BFGS. Selanjutnya, model CBDX diimplementasikan menggunakan data tingkat kematian penduduk Indonesia melalui 2 skenario, yaitu tanpa pengelompokan usia dan dengan pengelompokan usia. Tujuan dari skenario ini adalah untuk memastikan apakah model CBDX dapat diimplementasikan dengan baik untuk seluruh kelompok usia penduduk di Indonesia atau hanya pada kelompok usia dewasa sesuai dengan hasil yang didapatkan oleh Dowd et al. (2020). Performa dari model akan dievaluasi menggunakan metode *Mean Average Percentage Error* yang menghitung rata-rata persentase galat dalam perbandingan antara hasil estimasi dengan nilai aktual tingkat mortalitas penduduk Indonesia

1.2. Rumusan Permasalahan

Perumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana mengonstruksi model CBDX untuk tingkat mortalitas?
2. Bagaimana performa model CBDX dalam memodelkan tingkat mortalitas penduduk Indonesia?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Mengonstruksi model CBDX untuk tingkat mortalitas.
2. Menganalisis performa model CBDX dalam memodelkan tingkat mortalitas penduduk Indonesia.

1.4. Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur mengenai model CBDX dan aplikasi data penduduk Indonesia.

1.5. Batasan Permasalahan

Batasan masalah dalam penelitian ini terdapat pada data yang digunakan. Penelitian ini menggunakan data tingkat kematian dan data tingkat mortalitas Indonesia yang tersedia pada rentang usia 0, 1, 5, 10, ..., 90 dan dari tahun 1950 - 2021 yang dapat diakses di laman <https://population.un.org/wpp/Download/Standard/Mortality/>.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas berbagai konsep yang berhubungan dengan model CBDX. Konsep-konsep tersebut antara lain seperti Variabel Acak Waktu Hidup Masa Depan, Tabel Mortalitas, Ukuran Mortalitas, *General Procedure*, *Age-Period-Cohort Model*, Metode Estimasi *Maximum Likelihood*, Metode Newton-Raphson, Metode Quasi Newton, dan *Mean Absolute Percentage Error*.

2.1. Variabel Acak Waktu Hidup Masa Depan

Misalkan (x) merupakan seorang individu berusia x , dimana $x \geq 0$. Kematian dari (x) dapat terjadi di usia kapan saja pada usia yang lebih besar dari x . Misalkan T_x merupakan variabel acak yang menyatakan waktu hidup dari (x) , maka $x + T_x$ menunjukkan usia saat kematian dari (x) .

(Dickson et al., 2019)

Ketika $x = 0$, maka T_0 menyatakan waktu hidup masa depan dari individu yang baru lahir. Dalam hal ini T_0 juga dapat diinterpretasikan sebagai usia saat kematian dari bayi yang baru lahir. Probabilitas bayi yang baru lahir tersebut meninggal sebelum mencapai usia x adalah $\Pr [T_0 < x]$. Apabila bayi yang baru lahir tersebut bertahan hidup hingga usia x sedemikian sehingga $T_0 > x$, maka variabel acak waktu hidup masa depan usia x adalah T_x dan usia kematiannya adalah $x + T_x$. Dengan demikian, T_x dan T_0 memiliki hubungan sebagai berikut:

$$x + T_x \equiv T_0 | T_0 > x \quad (2.1)$$

Atau dengan kata lain

$$T_x \equiv T_0 - x | T_0 > x \quad (2.2)$$

2.1.1. Fungsi Distribusi dari T_x

Misalkan F_x merupakan fungsi distribusi dari T_x , sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}
 F_x(n) &= \Pr[T_x \leq n] \\
 &= \Pr[T_0 - x | T_0 > x] \\
 &= \Pr[T_0 \leq x + n | T_0 > x] \\
 &= \frac{\Pr[x < T_0 \leq x + n]}{\Pr[T_0 > x]} \\
 &= \frac{F_0(x + n) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Maka $F_x(n)$ merepresentasikan suatu probabilitas dimana (x) tidak dapat bertahan hidup melebihi usia $x + n$ atau $F_x(n)$ merepresentasikan suatu probabilitas dimana (x) meninggal sebelum atau pada usia $x + n$. Dalam notasi aktuaria penulisan dari $F_x(n)$ dilambangkan dengan notasi ${}_nq_x$. Pada saat $n = 1$, notasi aktuaria yang digunakan adalah q_x yaitu probabilitas dimana (x) meninggal sebelum atau pada usia $x + 1$.

(Dickson et al., 2019)

2.1.2. Fungsi Survival dari T_x

Misalkan S_x merupakan fungsi survival dari T_x , maka akan didefinisikan S_x sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 S_x(n) &= 1 - F_x(n) = \Pr[T_x > n] \\
 &= 1 - \frac{F_0(x + n) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \\
 &= \frac{1 - F_0(x + n)}{1 - F_0(x)} \\
 &= \frac{S_0(x + n)}{S_0(x)}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Maka $S_x(n)$ merepresentasikan suatu probabilitas dimana (x) bertahan hidup sampai setidaknya n tahun atau sebagai probabilitas dimana (x) masih hidup sampai usia $x + n$. Dalam notasi aktuaria penulisan dari $S_x(n)$ dilambangkan dengan notasi ${}_np_x$. Pada saat

$n = 1$, notasi aktuarial yang digunakan adalah p_x yaitu probabilitas dimana (x) meninggal sebelum atau pada usia $x + 1$.

(Dickson et al., 2019)

2.1.3. Fungsi Densitas dari T_x

Misalkan f_x merupakan fungsi densitas dari T_x , f_x didefinisikan sebagai turunan dari F_x . Maka, f_x didefinisikan sebagai berikut

$$f_x(n) = \frac{d}{dt} F_x(n) = -\frac{d}{dt} S_x(n), n \geq 0 \quad (2.5)$$

2.2. Tabel Mortalitas

2.2.1. Tabel Mortalitas

Dickson et al. (2019) mendefinisikan tingkat mortalitas sebagai suatu probabilitas dimana seseorang meninggal pada suatu periode tertentu. Dalam pengukurannya tingkat mortalitas diukur dengan suatu alat pengukuran risiko yang disebut sebagai Tabel Mortalitas. Tabel Mortalitas adalah sebuah alat pengukur risiko yang menunjukkan tingkatan suatu mortalitas untuk setiap usia berdasarkan jumlah individu yang meninggal ataupun jumlah individu yang masih hidup (Wolthuis & Willemse, 2004).

Tabel Mortalitas memiliki komponen-komponen penyusun dasarnya yang dituliskan berdasarkan notasi aktuarial antara lain l_x dan d_x serta komponen penyusun lainnya yang merupakan pengembangan dari komponen-komponen dasar. Setiap komponen diurutkan berdasarkan usia dari $x, x = 0, 1, 2, \dots, \omega$; dimana ω merupakan batasan usia maksimum individu. Penjelasan akan komponen-komponen penyusun dari Tabel Mortalitas akan dijelaskan definisi-definisinya sebagai berikut

- ❖ $l_{x,t}$ merupakan ekspektasi dari jumlah individu yang masih hidup pada usia x dan periode tahun ke- t .
- ❖ $d_{x,t}$ merupakan ekspektasi dari jumlah individu yang meninggal antara usia x dan $x + 1$ pada periode tahun ke- t .

- ❖ $L_{x,t}$ merupakan kuantitas dari jumlah individu yang terpapar risiko kematian pada usia x dan $x + 1$ pada periode tahun ke- t .

Notasi-notasi di atas memiliki keterkaitan antara lain:

- ❖ Hubungan antara notasi $l_{x,t}$ dan $d_{x,t}$

$$d_{x,t} = l_{x,t} - l_{x+1,t} \quad (2.6)$$

- ❖ Hubungan antara notasi l_x dan L_x

$$L_{x,t} = \int_0^1 l_{x+s,t} ds \quad (2.7)$$

(Bowers et al., 1997)

2.2.2. Hubungan antara Kuantitas Tabel Mortalitas dengan Kuantitas Distribusi

T_x

Berdasarkan interpretasi dari kuantitas $q_{x,t}$ maupun $p_{x,t}$, dapat ditentukan hubungan antara $q_{x,t}$ dan $p_{x,t}$ terhadap $l_{x,t}$ dan $d_{x,t}$. Ingat bahwasannya $q_{x,t}$ merupakan probabilitas dimana (x) meninggal sebelum atau pada usia $x + 1$ di periode ke- t . Berdasarkan definisi probabilitas sebagai frekuensi relatif maka $q_{x,t}$ dapat dipandang sebagai rasio antara jumlah dari orang yang meninggal antara usia x dan $x + 1$ pada periode ke- t terhadap jumlah dari orang yang masih hidup hingga usia x di periode tersebut. Secara matematis ditulis sebagai berikut:

$$q_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{l_{x,t}} = \frac{l_{x,t} - l_{x+1,t}}{l_{x,t}} \quad (2.8)$$

Selanjutnya $p_{x,t}$ yang merupakan suatu probabilitas dimana (x) meninggal sebelum atau pada usia $x + 1$ di periode t , dapat dipandang sebagai komplemen dari $q_{x,t}$, yaitu

$$p_{x,t} = 1 - q_{x,t} = \frac{l_{x+1,t}}{l_{x,t}} \quad (2.9)$$

2.3. Ukuran Mortalitas

Ukuran mortalitas adalah satuan pengukuran yang digunakan untuk mengindikasikan tingkat mortalitas pada suatu populasi dalam periode waktu tertentu (Véron et al., 2002). Selain dari kuantitas distribusi T_x dan notasi aktuarial pada tabel mortalitas, terdapat pula ukuran-ukuran yang dapat digunakan dalam melakukan pengukuran suatu tingkat mortalitas antara lain.

2.3.1. Force of Mortality

Force of Mortality, μ_x merupakan laju kematian sesaat dari seorang individu pada usia x . *Force of Mortality* dalam kuantitas distribusi dari T_x didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{[Pr T_0 \leq x + dx | T_0 > x]}{dx} \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0^+} \frac{[Pr T_x \leq dx]}{dx}\end{aligned}\quad (2.10)$$

(Dickson et al., 2019)

Berdasarkan definisi fungsi densitas dari T_x (2.5) dapat dituliskan bentuk lain dari *Force of Mortality* sebagai berikut:

$$\mu_x = \frac{-\frac{d}{dx} S_0(x)}{S_0(x)} = \frac{-\frac{d}{dx} {}_x p_0}{{}_x p_0} = \frac{-\frac{d}{dx} l_x}{l_x}\quad (2.11)$$

(Dickson et al., 2019)

Pada kenyataannya, laju kematian sesaat dari seseorang pada usia tertentu, misal pada usia x dapat berubah dari waktu ke waktu. Berdasarkan hal tersebut, dapat didefinisikan laju kematian sesaat dari seseorang berusia $x + n$ tahun dengan $n > 0$, yaitu μ_{x+n} sebagai berikut:

$$\mu_{x+n} = \frac{-\frac{d}{dt} S_x(n)}{S_x(n)} = \frac{f_x(n)}{S_x(n)} = \frac{-\frac{d}{dt} l_{x+n}}{l_{x+n}}\quad (2.12)$$

(Dickson et al., 2019)

Ketika T_x diasumsikan mengikuti *Constant Force of Mortality* berlaku:

$$\mu_{x+n,t} = \mu_{x,t} = \mu \quad (2.13)$$

Akibatnya,

$${}_np_{x,t} = e^{-\int_0^n \mu_{x,t} ds} = e^{-n\mu_{x,t}} \quad (2.14)$$

Yang ekuivalen dengan,

$${}_np_{x,t} = (p_{x,t})^n = \frac{l_{x+n,t}}{l_{x,t}} \quad (2.15)$$

Akibatnya

$$l_{x+n,t} = l_{x,t} \left(\frac{l_{x+1,t}}{l_{x,t}} \right)^n = l_{x,t} (p_{x,t})^n \quad (2.16)$$

Berangkat dari (2.7) dan (2.16) dimana notasi dari $L_{x,t}$ dapat dituliskan ulang menjadi

$$L_{x,t} = \int_0^1 l_{x+n,t} ds = \int_0^1 l_{x,t} (p_{x,t})^n ds = \frac{-l_{x,t} \cdot q_{x,t}}{\ln p_{x,t}} = \frac{-d_{x,t}}{-\mu_{x,t}} = \frac{d_{x,t}}{\mu_{x,t}} \quad (2.17)$$

Selanjutnya, notasi $\mu_{x,t}$ akan digunakan untuk menyatakan *Force of Mortality* untuk individu berusia x pada periode t .

2.3.2. Central Death Rate

Central Death Rate atau tingkat kematian pusat yang dinotasikan dengan ${}_nm_{x,t}$, didefinisikan sebagai nilai rata-rata berbobot dari laju kematian (*Force of Mortality*) untuk usia x sampai usia $x + n$ pada periode t . *Central Death Rate* atau ${}_nm_{x,t}$ didefinisikan sebagai berikut

$${}_nm_{x,t} = \frac{\int_0^n {}_sp_{x,t} \cdot \mu_{x+n,t} ds}{\int_0^n {}_sp_{x,t} ds} \quad (2.18)$$

(Cunningham et al., 2006)

Dalam notasi aktuaria pada tabel mortalitas, *Central Death Rate* didefinisikan sebagai jumlah kematian yang diamati pada usia x dibagi dengan jumlah seseorang yang terpapar risiko kematian, yaitu

$$m_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{L_{x,t}} \quad (2.19)$$

(London, 1988)

Untuk $n > 1$ maka *Central Death Rate* didefinisikan sebagai berikut

$${}_n m_{x,t} = \frac{{}_n d_{x,t}}{{}_n L_{x,t}} \quad (2.20)$$

Di bawah asumsi *Constant Force of Mortality* dan persamaan (2.17) maka notasi dari ${}_n m_{x,t}$ atau *central death rate* dapat didefinisikan kembali sebagai

$${}_n m_{x,t} = \frac{{}_n d_{x,t}}{{}_n L_{x,t}} = \frac{{}_n d_{x,t}}{\frac{{}_n d_{x,t}}{\mu_{x,t}}} = \mu_{x,t} \quad (2.21)$$

Berdasarkan (2.14) dan (2.21) maka hubungan antara ${}_n m_x$ dengan ${}_n q_x$ dapat dituliskan sebagai berikut

$${}_n q_{x,t} = 1 - e^{-{}_n m_{x,t}} \quad (2.22)$$

2.4. General Procedure

Hunt & Blake dalam *A General Procedure for Constructing Mortality Models* (2014) mendefinisikan *General Procedure* (GP) sebagai suatu prosedur dalam membangun suatu model mortalitas secara sistematis dengan mengidentifikasi fitur demografis yang signifikan dalam data mortalitas dan merepresentasikannya dalam bentuk parametrik yang relevan. Fitur demografis didefinisikan sebagai interpretasi dari komponen suatu model dalam hal biologis, medis atau sosio-ekonomi yang mendasari penyebab perubahan tingkat kematian.

Dengan menerapkan GP, dimungkinkan untuk membangun suatu model mortalitas dengan jumlah parameter yang ekonomis untuk menangkap secara akurat seluruh informasi signifikan yang ada dalam usia, periode, dan kohort dari data. Dengan kata lain, GP secara khusus mencegah adanya kesalahan pengalokasian seperti efek usia periode dialokasikan secara keliru kepada efek kohort.

Dengan menerapkan GP dimungkinkan untuk membangun model mortalitas yang memenuhi kriteria berikut:

- Model dapat merepresentasikan data dengan baik,
- Model yang dihasilkan sejalan dengan konsep biologis, dimana sesuai dengan kaidah kesehatan ataupun kaidah biologis yang berlaku.
- Bersifat parsimoni, artinya dengan parameter sesedikit mungkin model tetap mampu menjelaskan data dengan baik.
- Kokoh (*robust*), artinya perubahan kecil dalam data tidak menghasilkan perubahan signifikan dalam estimasi parameter.
- Model berlaku untuk seluruh rentang usia.
- Model mempertimbangkan efek kohort dan mampu membedakan efek kohort dengan efek usia-periode dengan jelas.

General Procedure untuk membangun model mortalitas terdiri dari langkah-langkah berikut:

1. Pembentukan model diawali dengan fungsi statis (α_x) untuk menangkap bentuk kurva mortalitas yang tidak bergantung pada waktu di seluruh usia dalam dataset.
2. Tambahkan pasangan fungsi usia dan periode non-parametrik ($\beta_x \kappa_t$), untuk menemukan efek usia-periode yang paling signifikan yang belum ditangkap oleh model. Fungsi usia non-parametrik (β_x) bebas untuk mengambil bentuk yang memaksimalkan kesesuaian dengan data. (Non-parametrik disini berarti komponen usia (β_x) diestimasi berdasarkan data sedangkan parametrik berarti komponen (β_x) sudah memiliki bentuk fungsi spesifik).

3. Berdasarkan hasil estimasi dari fungsi usia non parametrik (β_x) dari langkah sebelumnya, amati bentuk (β_x) yang dihasilkan dari seluruh usia dan pola κ_t seiring berjalannya waktu.
4. Periksa bahwa penambahan pasangan komponen ($\beta_x \kappa_t$) menghasilkan model yang lebih sesuai (*fit*) terhadap data.
5. Gunakan penilaian untuk memilih bentuk fungsional yang spesifik ($f(x; \theta)$) dan dapat menggantikan komponen usia non-parametrik (β_x) menjadi komponen usia parametrik, di mana fungsi ($f(x; \theta)$) didefinisikan oleh sejumlah parameter bebas (θ).
6. Periksa apakah model dengan bentuk fungsional spesifik ini:
 - Menghasilkan evolusi yang serupa seiring waktu seperti komponen non-parametrik dengan membandingkan nilai κ_t untuk kedua kasus.
 - Mencapai kemajuan yang serupa dalam *goodness of fit* seperti pada komponen non-parametrik.
7. Periksa apakah penambahan pasangan komponen baru ($f(x; \theta) \kappa_t$) telah secara signifikan mengubah bentuk komponen yang digunakan sebelumnya, yang mungkin memerlukan perubahan dan re-estimasi komponen sebelumnya.
8. Tambahkan komponen kohort (γ_{t-x}) untuk menangkap efek dari tahun kelahiran. Dimana efek kohort dianggap secara demografis signifikan apabila nilainya mempengaruhi tingkat mortalitas pada berbagai usia untuk individu yang lahir dalam kohort tertentu.

Bentuk umum dari model mortalitas yang dihasilkan oleh *General Procedure* dirumuskan secara matematis sebagai berikut.

$$\eta \left(E \left(\frac{D_{x,t}}{E_{x,t}} \right) \right) = \alpha_x + \sum_{i=1}^N f^{(i)}(x; \theta^{(i)}) \kappa_t^{(i)} + \gamma_{t-x}$$

Dimana:

- η adalah *link function* untuk mentransformasi variabel respon.
- $D_{x,t}$ adalah jumlah kematian pada usia x dan tahun t .

- $E_{x,t}$ adalah jumlah paparan risiko pada usia x dan tahun t .
- α_x adalah fungsi usia statis yang menangkap bentuk umum kurva mortalitas yang tidak berubah seiring waktu.
- $f^{(i)}(x; \theta^{(i)})$ adalah fungsi usia parametrik yang dipilih untuk mewakili fitur demografis tertentu, seperti peningkatan atau penurunan mortalitas pada kelompok usia tertentu.
- $\kappa_t^{(i)}$ adalah tren periode yang berhubungan dengan istilah usia/periode ke- i , yang menunjukkan bagaimana tingkat mortalitas berevolusi sepanjang waktu.
- γ_{t-x} adalah parameter kohort yang menentukan efek seumur hidup yang spesifik untuk generasi yang berbeda, ditandai dengan tahun kelahiran mereka.

Secara umum, bentuk model mortalitas yang dihasilkan oleh *General Procedure* memiliki struktur *Age Period Cohort* yang akan dijelaskan lebih lanjut pada subbab selanjutnya.

2.5. Age-Period-Cohort Model

Dalam *On the Structure and Classification of Mortality Models* oleh Hunt & Blake (2020) struktur *Age Period Cohort* (APC) didefinisikan sebagai suatu model mortalitas yang menghubungkan variabel respons dengan suatu prediktor linier atau bilinear yang berisikan faktor-faktor yang dependen dengan variabel umur, periode, dan kohort untuk suatu populasi. Dengan kata lain, model APC secara umum diklasifikasikan sebagai *Generalized Non-Linear Models* (GNMs), yang memiliki struktur sebagai berikut:

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^i \kappa_t^i + \beta_x^0 \gamma_{t-x}$$

Struktur ini memiliki komponen-komponen antara lain:

- ❖ Suatu *link function*, $\eta_{x,t}$ untuk mentransformasi variabel respon.
- ❖ Suatu fungsi usia statis, α_x , untuk menangkap bentuk umum suatu mortalitas pada semua usia yang tidak dipengaruhi oleh perubahan dari waktu.

- ❖ Sebanyak N jumlah komponen usia-periode, $\beta_x^i \kappa_t^i$, yang berisikan fungsi periode κ_t^i , yang menjelaskan terkait evolusi dari tingkat mortalitas dalam waktu. Fungsi usia, β_x^i , yang menjelaskan terkait pola dari perubahan tingkat mortalitas sepanjang usia.
- ❖ Suatu komponen usia-kohort, $\beta_x^0 \gamma_{t-x}$, berisikan efek kohort, γ_{t-x} , yang menjelaskan terkait efek spesifik untuk tiap generasi yang ditunjukkan oleh tahun kelahiran mereka.

2.6. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan distribusi probabilitas untuk variabel acak yang nilainya berupa bilangan cacah. Distribusi ini sering digunakan dalam analisis data untuk menghitung frekuensi peristiwa langka. Contoh aplikasi dari distribusi Poisson termasuk pemodelan frekuensi jumlah kecelakaan lalu lintas di sebuah area, jumlah produk yang rusak dalam produksi industri, dan lain sebagainya.

Suatu variabel acak Y mengikut distribusi *Poisson* dengan parameter $\lambda > 0$ dinotasikan sebagai $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ dan memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}; & y = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & ; y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Karakteristik khusus yang dimiliki oleh distribusi Poisson adalah memiliki nilai mean dan variansi yang sama atau sifat ekuidispersi. Nilai mean dan variansi dari distribusi Poisson dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(y) &= \lambda \\ \text{Var}(y) &= \lambda \end{aligned}$$

(Hogg et al., 2019)

Dalam penelitian ini distribusi Poisson digunakan sebagai asumsi untuk distribusi dari data jumlah kematian dari individu berusia x pada periode ke t dalam kurun waktu n tahun kedepan, ${}_n d_{x,t}$.

2.7. Metode Estimasi Maximum Likelihood

Metode *Maximum Likelihood* adalah suatu metode estimasi untuk memaksimalkan nilai dari fungsi *likelihood*. Fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai nilai *likelihood* dari suatu atau serangkaian parameter dari suatu fungsi distribusi dari suatu variabel acak jika diberikan nilai-nilai observasi dari variabel acak tersebut (Myung, 2003).

Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari suatu distribusi dengan fungsi densitas probabilitas $f(x; \theta)$ yang memiliki ketergantungan pada parameter θ yang tidak diketahui nilainya dengan $\theta \in \Omega$ dimana Ω merupakan ruang parameter. Fungsi densitas probabilitas bersama dari $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \quad (2.23)$$

Maka fungsi *likelihood*nya diberikan pada persamaan berikut

$$\begin{aligned} L(\theta; x) &= f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \theta) \\ &= f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad \theta \in \Omega \end{aligned} \quad (2.24)$$

dimana $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$. Persamaan (2.24) biasa ditulis sebagai $L(\theta)$. Pada penggunaannya fungsi $L(\theta)$ umumnya dituliskan dalam bentuk log nya yang diberikan oleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \ln L(\theta) = \ln \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta), \quad \theta \in \Omega \end{aligned} \quad (2.25)$$

Misalkan didefinisikan nilai estimasi dari θ adalah $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$, dimana $\hat{\theta}$ memaksimalkan fungsi *likelihood* $L(\theta)$. Maka, $\hat{\theta}$ akan disebut sebagai *maximum likelihood estimator* (MLE) dari θ . Fungsi *likelihood* dapat dimaksimalkan dengan mencari turunan pertama dari $\ln L(\theta)$ sedemikian sehingga

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = \frac{d}{d\theta} l(\theta) = 0 \quad (2.26)$$

(Hogg et al., 2019)

2.8. Metode Iterasi Newton-Raphson

Pada penelitian ini metode Newton Raphson digunakan untuk mencari solusi numerik dari persamaan non-linier yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Metode Newton-Raphson digunakan untuk mengoptimisasi persamaan non-linier dengan cara membangkitkan nilai dari dari fungsi *log-likelihood*. Metode ini dilakukan secara berulang-ulang sampai diperoleh hasil yang mendekati nilai penyelesaian. (Jorge Nocedal & Stephen Wright, 2006)

Misal akan dimaksimumkan suatu fungsi nonlinear $f(p)$ dimana $p = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)^T$. Turunan pertama dari fungsi $f(p)$ terhadap p , pada iterasi ke- i dimana $i = 1, 2, \dots$ dinotasikan dengan $g_i = \nabla f = \frac{\partial}{\partial p_i}$. Matriks Hessian berukuran $n \times n$ dari fungsi $f(p)$ terhadap p pada iterasi ke- i dimana $i = 1, 2, \dots$ dinotasikan dengan $G_i = \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_i^T}$. Invers dari matriks Hessian dinotasikan dengan G_i^{-1} .

Metode ini diturunkan melalui ekspansi deret Taylor yang akan dimaksimumkan. Misal nilai iterasi terbaru dinotasikan dengan p_{i+1} . p_{i+1} didapatkan dari aproksimasi ekspansi Taylor orde dua fungsi $f(p_{i+1})$ disekitar p_i , yaitu

$$f(p_{i+1}) = f(p_i) + (p_{i+1} - p_i)^T g_i + \frac{(p_{i+1} - p_i)^T}{2} G_i (p_{i+1} - p_i)$$

Nilai p yang memaksimumkan persamaan di atas dapat diperoleh dari solusi persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(p_{i+1})}{\partial p_{i+1}} &= 0 \quad (2.27) \\ \frac{\partial [f(p_i) + (p_{i+1} - p_i)^T g_i + \frac{(p_{i+1} - p_i)^T}{2} G_i (p_{i+1} - p_i)]}{\partial p_{i+1}} &= 0 \\ g_i + G_i (p_{i+1} - p_i) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_i(p_{i+1} - p_i) &= -g_i \\
(p_{i+1} - p_i) &= -G_i^{-1} g_i \\
p_i + (-G_i^{-1}) g_i &= p_{i+1}
\end{aligned}$$

Dapat dilihat dari persamaan (2.27) bahwa untuk mendapatkan nilai iterasi p_{i+1} dibutuhkan turunan pertama dan invers matriks Hessian. Persamaan (2.27) disebut sebagai prosedur dari metode Newton Raphson dimana matriks Hessian dicari secara analitik.

(Jorge Nocedal & Stephen Wright, 2006)

2.9. Metode Quasi Newton

Metode quasi-Newton merupakan salah satu pengembangan dari metode Newton-Raphson. Metode Newton Raphson memiliki kelemahan berupa lamanya waktu yang dibutuhkan dalam melakukan perhitungan matriks turunan pertama dan perhitungan matriks Hessian yang rumit (Arneric & Rozga, 2009). Oleh karena itu, diperlukan perhitungan menggunakan aproksimasi dari invers matriks Hessian yaitu metode Quasi Newton. Metode ini menggunakan matriks aproksimasi dibandingkan matriks Hessian. Matriks aproksimasi yang dipilih memiliki sifat definit positif dan simetri. Pada umumnya matriks identitas adalah matriks yang umum digunakan sebagai inisiasi awal dari aproksimasi matriks Hessian. Prosedur iterasi metode quasi-Newton adalah sebagai berikut

$$E_i(p_{i+1} - p_i) = \nabla f(p_{i+1}) - \nabla f(p_i) \quad (2.28)$$

Dimana E_i adalah aproksimasi matriks Hessian pada iterasi ke- i . Terdapat beberapa metode iterasi untuk mengaproksimasi matriks Hessian pada metode quasi-Newton, antara lain metode Davidon, Fletcher, dan Powell (DFP) dan metode Broyden Fletcher Goldfarb Shanno (BFGS). Pada penelitian ini akan digunakan metode BFGS untuk mengaproksimasi nilai dari matriks Hessian.

(Jorge Nocedal & Stephen Wright, 2006)

2.10. Metode Random Walk with Drift

Random Walk merupakan sebuah proses runtun waktu dengan nilai periode berikutnya diperoleh berdasarkan nilai periode saat ini dan ditambah dengan nilai *error*. Misal $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ merupakan sampel acak yang berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi σ^2 untuk setiap $t = 1, 2, \dots$, sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} y_1 &= \varepsilon_1 \\ y_2 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_t &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t \end{aligned}$$

yang dapat ditulis kembali sebagai berikut ,

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.29)$$

Random Walk with Drift merupakan sebuah *Random Walk* yang memiliki parameter *drift*, μ , dimana parameter ini ditambahkan pada setiap periode. *Random Walk with Drift* dinyatakan dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} y_1 &= \varepsilon_1 \\ y_2 &= y_1 + \mu + \varepsilon_2 = y_0 + \mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ y_3 &= y_2 + \mu + \varepsilon_3 = y_0 + 2\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ &\vdots \\ y_t &= y_0 + (t-1)\mu + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t \end{aligned}$$

dengan ε_t merupakan *error* dengan rata-rata 0 dan variansi σ^2 untuk setiap t . Secara umum *Random Walk with Drift* memiliki persamaan :

$$y_t = y_{t-1} + (t-1)\mu + \varepsilon_t \quad ; t = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) dapat diuraikan kembali menjadi

$$y_t = y_0 + (t-1)\mu + \sum_{l=1}^t \varepsilon_l$$

Karena *mean error*-nya adalah 0 maka *Random Walk* pada waktu berikutnya ($t + 1$) dapat diprediksi dengan persamaan berikut

$$\widehat{y_{t+1}} = y_0 + t\mu \quad (2.31)$$

Dimana μ adalah parameter *drift* yang dapat diestimasi dari persamaan (2.31) sebagai berikut

$$\mu = \frac{y_t - y_0}{t - 1}$$

(Cryer, 2008)

2.11. Mean Absolute Percentage Error

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) didefinisikan sebagai rata-rata galat persentase absolut dari nilai observasi aktual pada periode ke- t yang dinotasikan sebagai Y_t terhadap nilai estimasi atau proyeksi dari periode ke- t yang dinotasikan sebagai $\hat{Y}_t$. Dengan kata lain, MAPE menunjukkan persentase perubahan antara nilai aktual dan nilai prediksi. MAPE akan digunakan dalam mengevaluasi performa model CBDX dalam melakukan prediksi tingkat mortalitas dengan menghitung error dari nilai selisih perbandingan antara hasil peramalan yang dilakukan dengan tabel mortalitas Indonesia. Secara matematis, MAPE dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right| \times 100\% \quad (2.32)$$

dimana:

- Y_t adalah nilai aktual pada periode ke- t
- $\hat{Y}_t$ adalah nilai estimasi pada periode ke- t
- n adalah jumlah data yang digunakan.

dengan kriteria nilai MAPE, yaitu:

1. MAPE < 10% berarti akurasi hasil prediksi sangat baik.
2. MAPE 10% – 20% berarti akurasi hasil prediksi baik.

3. MAPE 20% – 50% berarti akurasi hasil prediksi cukup baik.
4. MAPE $>$ 50% berarti akurasi hasil prediksi buruk.

(Lewis, 1982).

BAB 3

MODEL CBDX UNTUK TINGKAT MORTALITAS

3.1. Model CBDX

Model CBDX merupakan salah satu pengembangan dari keluarga model mortalitas Cairns-Blake-Dowd (CBD) yang dibentuk untuk memodelkan tingkat mortalitas dengan mempertimbangkan efek usia, efek periode, dan kohort. Pembentukan model CBDX ini menerapkan *General Procedure* (GP), dengan asumsi jumlah kematian berdistribusi Poisson.

Model CBDX yang dikembangkan melalui penerapan *General Procedure* memiliki struktur model mortalitas *Age-Period-Cohort* (APC) yang memungkinkan model tersebut dapat menangkap interaksi yang kompleks antara efek usia, periode, dan kohort. Adapun persamaan model Mortalitas CBDX yang diusulkan oleh Cairns-Blake-Dowd diberikan sebagai berikut

$$\log {}_n m_{x,t} = \alpha(x) + \sum_{i=1}^K \beta_i(x) \kappa_i(t) + \gamma(c) \quad (3.1)$$

Dimana x merepresentasikan usia, t merepresentasikan periode, dan $c = t - x$ yang merepresentasikan tahun kelahiran. Model mortalitas CBDX memiliki variabel respon berupa *Central Death Rate* (CDR) atau tingkat kematian yang didefinisikan sebagai berikut ${}_n m_{x,t} = \frac{{}_n d_{x,t}}{{}_n L_{x,t}}$, dimana ${}_n d_{x,t}$ adalah jumlah individu berusia x pada periode t yang meninggal dalam kurun waktu n tahun kedepan dan ${}_n L_{x,t}$ adalah jumlah individu berusia x pada periode t yang terpapar risiko kematian dalam kurun waktu n tahun kedepan. Pemilihan CDR sebagai variabel respon dikarenakan dalam model CBDX jumlah kematian diasumsikan mengikuti distribusi *Poisson*. Hal ini sejalan dengan pembentukan model CBDX yang menerapkan *General Procedure* dalam pembentukannya dimana jumlah kematian diasumsikan mengikuti distribusi Poisson.

Link function berupa fungsi logaritma natural dipilih untuk mentransformasi variabel respon yaitu, ${}_n m_{x,t}$. Pemilihan *link function* berupa logaritma natural dikarenakan model CBDX yang mengikuti struktur APC memiliki variabel respon yang diasumsikan berdistribusi Poisson. Oleh karena itu, logaritma natural dipilih agar nilai harapan dari variabel respon yang diperoleh bernilai non-negatif.

Selanjutnya model CBDX juga memiliki suatu fungsi umur statis berupa $\alpha(x)$, memiliki K jumlah parameter usia-periode berupa $\beta_i(x)\kappa_i(t)$, dan suatu parameter kohort berupa $\gamma(c)$. Model CBDX ini muncul dalam tiga versi antara lain:

- ❖ $K = 1$, adalah kasus dimana hanya terdapat satu variabel $\kappa(t)$ – dinamakan dengan model CBDX1. Pada nilai $K = 1$, maka parameter yang digunakan adalah $\beta_1 = 1$, dengan persamaan sebagai berikut:

$$\log {}_n m_{x,t} = \alpha(x) + \kappa_1(t) + \gamma(c)$$

- ❖ $K = 2$, adalah kasus dimana terdapat dua variabel $\kappa(t)$ – dinamakan dengan model CBDX2. Pada nilai $K = 2$, maka parameter yang digunakan adalah $\beta_1 = 1$ & $\beta_2 = (x - \bar{x})$, dengan persamaan sebagai berikut:

$$\log {}_n m_{x,t} = \alpha(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + \gamma(c)$$

- ❖ $K = 3$, adalah kasus dimana terdapat tiga variabel $\kappa(t)$ – dinamakan dengan model CBDX3. Pada nilai $K = 3$, maka parameter yang digunakan adalah $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = (x - \bar{x})$ & $\beta_3 = (x - \bar{x})^2 - \sigma^2$, dengan persamaan sebagai berikut:

$$\log {}_n m_{x,t} = \alpha(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t) + \gamma(c)$$

Dimana $\bar{x}$ dan σ^2 merupakan mean dan variansi dari rentang usia sampel.

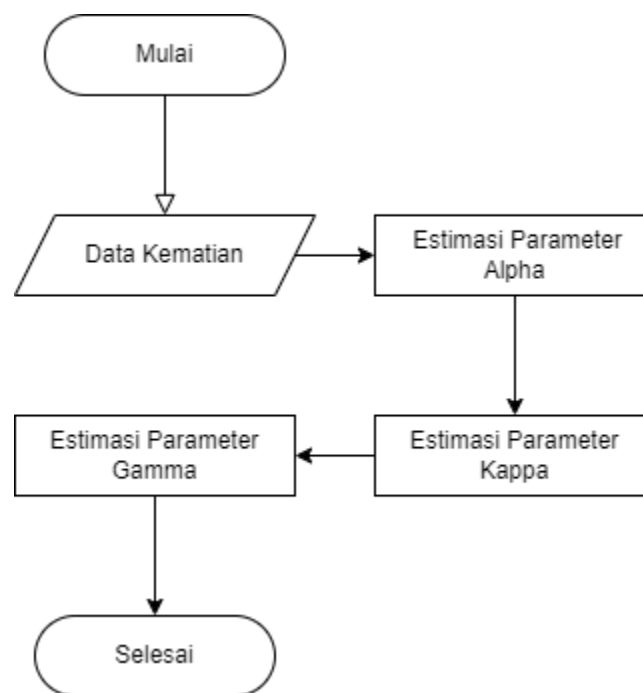
Dari formula umum model CBDX pada persamaan (3.1) terlihat bahwa terdapat 3 sampai 5 parameter yang perlu diestimasi yaitu $\alpha(x)$, $\kappa_i(t)$, dan $\gamma(c)$ dimana $i = 1, 2, 3$.

3.2. Estimasi Nilai Parameter $\alpha(x)$, $\kappa(t)$, dan $\gamma(c)$

Model CBDX merupakan model yang direpresentasikan dalam suatu persamaan yang memuat 3 hingga 5 parameter $\alpha(x)$, $\kappa_i(t)$, dan $\gamma(c)$. Pada subbab ini akan dibahas proses estimasi nilai parameter-parameter tersebut dengan menggunakan metode

Sequential Maximum Likelihood. Pada metode ini pengestimasi parameter akan dilakukan secara bertahap dimulai dari parameter $\alpha(x)$, kemudian $\kappa_i(t)$, dan $\gamma(c)$. Tujuan dari pengestimasi parameter secara bertahap ini adalah agar model CBDX dapat mengidentifikasi efek dari usia terlebih dahulu dari pengestimasi parameter $\alpha(x)$ yang hanya mempertimbangkan efek dari usia tanpa mempertimbangkan periode dan tahun kelahiran. Selanjutnya dilakukan pengestimasi parameter $\kappa_i(t)$ dengan menggunakan nilai dari $\hat{\alpha}(x)$ tanpa adanya efek kohort, dengan tujuan untuk mencegah adanya pengidentifikasi efek dari usia dan periode dialokasikan kepada efek kohort. Selanjutnya dilakukan pengestimasi parameter $\gamma(c)$ dengan menggunakan nilai dari parameter $\hat{\alpha}(x)$ dan $\hat{\kappa}_i(t)$ yang akan mengidentifikasi efek dari kohort atau tahun kelahiran.

Diagram alur atau *flow chart* untuk algoritma *sequential maximum likelihood* diberikan pada gambar (3.1) berikut.



Gambar 3.1. Flow Chart algoritma Sequential Maximum Likelihood

Misalkan $\Theta = \{\alpha, \kappa, \gamma\}$ merupakan parameter yang akan diestimasi, dimana κ berkorespondensi dengan $\kappa_1(t)$ untuk CBDX1, $(\kappa_1(t), \kappa_2(t))$ untuk CBDX2 dan $(\kappa_1(t), \kappa_2(t), \kappa_3(t))$ untuk CBDX3, dengan $t = 1, \dots, n_y$. Misalkan $n d_{x,t}$ yang

merupakan jumlah individu berusia x pada tahun t yang meninggal dalam kurun waktu n tahun kedepan diasumsikan mengikuti distribusi *poisson* dengan:

$$E[n d_{x,t}] = Var[n d_{x,t}] = n L_{x,t} n m_{x,t}$$

Berdasarkan pdf dari distribusi *poisson* pada subbab 2.6, fungsi densitas peluang dari $n d_{x,t}$ diberikan oleh persamaan berikut

$$f(n d_{x,t}; \Theta) = \frac{n L_{x,t} n m_{x,t}^{n d_{x,t}} e^{-n L_{x,t} n m_{x,t}}}{n d_{x,t}!}$$

Maka fungsi log *likelihood* untuk $\Theta = \{\alpha, \kappa, \gamma\}$ diberikan oleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned} l(\alpha, \kappa, \gamma) &= \sum_{t,x} \ln f(n d_{x,t}; \Theta) \\ &= \sum_{t,x} [n d_{x,t} \ln n m_{x,t} n L_{x,t} - n L_{x,t} n m_{x,t} - \ln (n d_{x,t}!)] \\ &= \sum_{t,x} [n d_{x,t} \ln n m_{x,t} + n d_{x,t} \ln n L_{x,t} - n L_{x,t} n m_{x,t} - \ln (n d_{x,t}!)] \\ &= \sum_{t,x} [n d_{x,t} \ln n m_{x,t} - n L_{x,t} n m_{x,t}] + \sum_{t,x} [n d_{x,t} \ln n L_{x,t} - \ln (n d_{x,t}!)] \\ &= \sum_{t,x} [n d_{x,t} \ln n m_{x,t} - n L_{x,t} n m_{x,t}] + constant \\ &= \sum_{t,x} n d_{x,t} (\alpha(x) + \kappa_1(t) + \beta_2(x) \kappa_2(t) + \beta_2(x) \kappa_2(t) + \beta_3(x) \kappa_3(t) + \gamma(t-x)) \\ &\quad - \sum_{t,x} n L_{x,t} e^{(\alpha(x) + \kappa_1(t) + \beta_2(x) \kappa_2(t) + \beta_3(x) \kappa_3(t) + \gamma(t-x))} + constant \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dengan $\beta_2(x) = (x - \bar{x})$ dan $\beta_3(x) = [(x - \bar{x}) - \sigma^2]^2$, $n L_{x,t}$ adalah jumlah individu yang berusia x pada tahun t dalam kurun waktu n tahun yang terpapar risiko kematian.

3.2.2. Langkah 1: Estimasi efek usia $\alpha(x)$

Berdasarkan algoritma *Sequential Maximum Likelihood*, untuk mengestimasi $\alpha(x)$ nilai dari $\kappa(t)$ dan $\gamma(c)$ dengan $c = t - x$ akan diatur menjadi 0 sehingga persamaan model CBDX menjadi:

$$\log {}_n m_{x,t} = \alpha(x) \quad (3.3)$$

yang ekuivalen dengan

$${}_n m_{x,t} = e^{\alpha(x)} \quad (3.4)$$

Dengan mensubstitusi (3.3) dan (3.4) kepada (3.2) didapatkan fungsi *log likelihood* sebagai fungsi dalam $\alpha(x)$ seperti di bawah ini

$$l(\alpha) = \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} {}_n d_{x_j,t} \alpha(x_j) - \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} {}_n L_{x_j,t} e^{\alpha(x_j)} + \text{constant} \quad (3.5)$$

Dimana n_y adalah nilai dari tahun sampel.

Estimator *Maximum Likelihood* untuk $\alpha(x_j)$ didapatkan dengan melakukan proses estimasi *Likelihood* terhadap persamaan (3.5) sebagai berikut

$$\frac{\partial \log L(\alpha)}{\partial \alpha(x_j)} = \sum_{t=1}^{n_y} \left(-e^{\alpha(x_j)} {}_n L_{x_j,t} + {}_n d_{x_j,t} \right) \quad (3.6)$$

$$-e^{\alpha(x_j)} \sum_{t=1}^{n_y} ({}_n L_{x_j,t}) + \sum_{t=1}^{n_y} ({}_n d_{x_j,t}) = 0 \quad (3.7)$$

$$e^{\alpha(x_j)} = \frac{\sum_{t=1}^{n_y} ({}_n d_{x_j,t})}{\sum_{t=1}^{n_y} ({}_n L_{x_j,t})} \quad (3.8)$$

$$\hat{\alpha}(x_j) = \ln \left\{ \frac{\sum_{t=1}^{n_y} ({}_n d_{x_j,t})}{\sum_{t=1}^{n_y} ({}_n L_{x_j,t})} \right\} \quad (3.9)$$

Untuk $j = 1, \dots, n_a$

3.2.3. Langkah 2: Estimasi efek periode $\kappa(t)$

Pada tahap ini, akan disubstitusi nilai dari $\hat{\alpha}(x)$ yang didapatkan dari langkah 1 kepada persamaan berikut

$$\log {}_n m_{x,t} = \hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t) \quad (3.10)$$

Yang ekuivalen dengan

$${}_n m_{x,t} = e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} \quad (3.11)$$

Dimana akan didapatkan fungsi *log-likelihood* sebagai fungsi dari $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ seperti di bawah ini

$$\begin{aligned} l(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = & \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} {}_n d_{xj,t} (\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)) \\ & - \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} {}_n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} + constant \end{aligned} \quad (3.12)$$

Gradien dari fungsi log-likelihood $l(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ yang memaksimumkan nilai dari likelihood diberikan oleh persamaan berikut secara berurutan untuk setiap $\kappa_i(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\kappa_1)}{\partial \kappa_1(t)} &= \sum_{j=1}^{n_a} {}_n d_{xj,t} - \sum_{j=1}^{n_a} (e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_n L_{xj,t}) \\ \frac{\partial l(\kappa_2)}{\partial \kappa_2(t)} &= \sum_{j=1}^{n_a} (x - \bar{x}) {}_n d_{xj,t} - \sum_{j=1}^{n_a} ((x - \bar{x}) e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_n L_{xj,t}) \\ \frac{\partial l(\kappa_3)}{\partial \kappa_3(t)} &= \sum_{j=1}^{n_a} [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] {}_n d_{xj,t} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n_a} ([(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_n L_{xj,t}) \end{aligned}$$

Dalam proses estimasi parameter $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk model CBDX, kompleksitas matematis dan interdependensi antar-parameter mengharuskan penggunaan metode

numerik, yang pada penelitian ini dipilih metode Quasi Newton, khususnya metode Broyden, Fletcher, Goldfarb, dan Shanno (BFGS) yang diperkenalkan pada tahun 1970.

Metode BFGS merupakan metode optimisasi yang dirancang untuk meminimumkan suatu fungsi. Oleh karena itu, fungsi *log-likelihood* diubah menjadi fungsi negatif *log-likelihood* untuk memaksimalkan likelihood dalam estimasi parameter $K = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$:

$$l(K) = - \left(\sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} n d_{xj,t} (\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)) \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} + constant \right) \quad (3.13)$$

Turunan pertama dari fungsi likelihood $l(K)$ terhadap K pada iterasi ke- i di mana $i = 1, 2, \dots$ dinotasikan dengan $g_i = \nabla l_i = \frac{\partial l}{\partial K_i}$. Selanjutnya matriks Hessian berukuran 3×3 dari fungsi *log-likelihood* $l(K)$ terhadap K pada iterasi ke- i di mana $i = 1, 2, \dots$ dinotasikan dengan $G_i = \frac{\partial^2 l}{\partial K_i \partial K_i^T}$. Lebih jelasnya, matriks Hessian tersebut memiliki bentuk sebagai berikut

$$G_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \kappa_1^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \kappa_1 \partial \kappa_2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \kappa_1 \partial \kappa_3} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \kappa_2 \partial \kappa_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \kappa_2^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \kappa_2 \partial \kappa_3} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \kappa_3 \partial \kappa_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \kappa_3 \partial \kappa_2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \kappa_3^2} \end{bmatrix}$$

Dimana,

$$\frac{\partial^2 l(\kappa_1)}{\partial \kappa_1(t)^2} = \sum_{j=1}^{n_a} (e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} n L_{xj,t})$$

$$\frac{\partial^2 l(\kappa_1)}{\partial \kappa_1(t) \partial \kappa_2(t)} = \sum_{j=1}^{n_a} ((x - \bar{x}) e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_nL_{xj,t})$$

$$\frac{\partial^2 l(\kappa_1)}{\partial \kappa_1(t) \partial \kappa_3(t)} = \sum_{j=1}^{n_a} ([(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_nL_{xj,t})$$

$$\frac{\partial^2 l(\kappa_2)}{\partial \kappa_2(t)^2} = \sum_{j=1}^{n_a} ((x - \bar{x})^2 e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_nL_{xj,t})$$

$$\frac{\partial^2 l(\kappa_2)}{\partial \kappa_2(t) \partial \kappa_1(t)} = \sum_{j=1}^{n_a} ((x - \bar{x}) e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_nL_{xj,t})$$

$$\frac{\partial^2 l(\kappa_2)}{\partial \kappa_2(t) \partial \kappa_3(t)} = \sum_{j=1}^{n_a} ((x - \bar{x}) [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_nL_{xj,t})$$

$$\frac{\partial^2 l(\kappa_3)}{\partial \kappa_3(t)^2} = \sum_{j=1}^{n_a} ([(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]^2 e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_nL_{xj,t})$$

$$\frac{\partial^2 l(\kappa_3)}{\partial \kappa_3(t) \partial \kappa_1(t)} = \sum_{j=1}^{n_a} ([(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_nL_{xj,t})$$

$$\frac{\partial^2 l(\kappa_3)}{\partial \kappa_3(t) \partial \kappa_2(t)} = \sum_{j=1}^{n_a} ((x - \bar{x}) [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} {}_nL_{xj,t})$$

Invers dari matriks Hessian dinotasikan dengan G_i^{-1} . Misalkan E_i adalah matriks definit positif yang digunakan untuk mengaproksimasi G_i^{-1} , maka matriks identitas I dipilih pada tahap awal matriks E_0 .

Pada subbab (2.10), telah dijelaskan bahwa metode BFGS yang merupakan metode Quasi-Newton dimana Quasi-Newton sendiri yang merupakan pengembangan dari metode Newton-Raphson. Nilai iterasi terbaru yang dinotasikan sebagai K_{i+1} di mana $i = 1, 2, \dots, K_{i+1}$ didapatkan melalui aproksimasi Taylor orde dua dengan fungsi $f(K_{i+1})$ disekitar K_i , yaitu

$$f(K_{i+1}) = f(K_i) + (K_{i+1} - K_i)^T g_i + \frac{(K_{i+1} - K_i)^T}{2} G_i (K_{i+1} - K_i)$$

Apabila persamaan di atas dimaksimumkan terhadap K_{i+1} , akan diperoleh persamaan berikut,

$$K_{i+1} = K_i + (-G_i^{-1} g_i)$$

Selanjutnya substitusi invers matriks Hessian dengan matriks aproksimasi E_i

$$K_{i+1} = K_i + (-E_i g_i)$$

Untuk menjamin nilai $l(K)$ bertambah pada setiap iterasinya diperkenalkan suatu skalar λ pada persamaan di atas sehingga

$$K_{i+1} = K_i + \lambda_i (-E_i g_i)$$

Dapat dilihat bahwa dalam mengestimasi nilai K_{i+1} dibutuhkan iterasi dari E_i yang terus diperbarui. Berikut merupakan algoritma BFGS untuk iterasi ke- i untuk matriks E :

1. Menghitung arah pencarian dengan rumus $d_{i-1} = -E_{i-1} g_{i-1}$
2. Mencari nilai λ_i yang ditentukan menggunakan metode *line search*. Lakukan *line search* untuk memperoleh nilai λ_{i-1} yaitu α_{i-1} . *Line search* adalah pencarian nilai α_{i-1} yang dapat memaksimumkan fungsi $K_{i-1} + \alpha_{i-1} d_{i-1}$.

Untuk mencari α harus dipenuhi kondisi berikut

$$L(K_i + \alpha_i d_i) \leq L(K_i) + c_1 \alpha_i g_i^T d_i$$

di mana dipilih $c_1 = 10^{-4}$. Selain itu kondisi lain yang harus dipenuhi adalah sebagai berikut

$$g(K_i + \alpha_i d_i)^T d_i \geq c_2 g(K_i)^T d_i$$

di mana umumnya nilai dari $c_2 = 0.9$

3. Memperbarui peubah estimasi $K_i = K_{i-1} + \alpha_{i-1} d_{i-1}$.
4. Menghitung $y_i = g_i - g_{i-1}$

5. Menghitung $s_i = K_i - K_{i-1}$
6. Memperbaharui estimasi matriks aproksimasi Hessian

$$E_i^{-1} = E_{i-1}^{-1} + \frac{y_{i-1}y_{i-1}^T}{y_{i-1}^T s_{i-1}} - \frac{E_{i-1}^{-1} s_{i-1} s_{i-1}^T E_{i-1}^{-1}}{s_{i-1}^T E_{i-1}^{-1} s_{i-1}} \quad (3.14)$$

Pada tahap ini, metode BFGS memastikan bahwa matriks aproksimasi Hessian E_i^{-1} tetap simetris dan definit positif. Kondisi kelengkungan $s_i y_i^T > 0$ harus dipenuhi untuk menjamin pembaharuan matriks E_i^{-1} tetap definit positif. Kondisi ini biasanya dipenuhi melalui metode *line search* yang memastikan langkah pencarian λ_i dilakukan dengan tepat.

7. Proses mencari K_{i+1} akan terus berulang hingga memenuhi uji konvergensi sebagai berikut dengan besar error(galat) yang digunakan adalah ε

$$\|K_{i+1} - K_i\| \leq \varepsilon \cdot \max\{1, \|\hat{K}_{i+1}\|\}$$

Sehingga diperoleh estimasi matriks invers Hessian pada iterasi ke- i adalah

$$E_i = E_{i-1} + \left(\frac{1 + y_{i-1}^T E_{i-1} y_{i-1}}{y_{i-1}^T s_{i-1}} \right) \frac{s_{i-1} s_{i-1}^T}{s_{i-1}^T y_{i-1}} - \frac{s_{i-1} y_{i-1}^T E_{i-1} + E_{i-1} y_{i-1} s_{i-1}^T}{y_{i-1}^T s_{i-1}} \quad (3.15)$$

Dengan langkah-langkah di atas, metode BFGS akan terus memperbaharui nilai parameter hingga mencapai konvergensi yang diinginkan, memberikan estimasi parameter $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ yang optimal.

(Jorge Nocedal & Stephen Wright, 2006)

3.2.4. Langkah 3: Estimasi efek kohort $\gamma(c)$

Pada tahapan ini, akan disubstitusi nilai dari $\hat{\alpha}(x), \hat{\kappa}_1(t), \hat{\kappa}_2(t), \hat{\kappa}_3(t)$ kepada persamaan (3.2)

$$\log_n m_{x,t} = \hat{\alpha}(x) + \hat{\kappa}_1(t) + (x - \bar{x})\hat{\kappa}_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\hat{\kappa}_3(t) + \gamma(c) \quad (3.16)$$

Selanjutnya akan didapatkan fungsi *log-likelihood* dalam γ :

$$\begin{aligned}
l(\gamma) = & \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} n d_{xj,t} (\hat{\alpha}(x) + \hat{\kappa}_1(t) + (x - \bar{x}) \hat{\kappa}_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] \hat{\kappa}_3(t) + \gamma(c)) \\
& - \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x) + \hat{\kappa}_1(t) + (x - \bar{x}) \hat{\kappa}_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] \hat{\kappa}_3(t) + \gamma(c)} + \text{constant}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Kemudian akan diturunkan fungsi *log-likelihood* pada persamaan (3.17) terhadap $\gamma(c)$, sebagai berikut

$$\frac{\partial \log l(\gamma)}{\partial \gamma(c)} = \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} (n d_{xj,t} - n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x) + \hat{\kappa}_1(t) + (x - \bar{x}) \hat{\kappa}_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] \hat{\kappa}_3(t) + \gamma(c)}) \tag{3.18}$$

Maximum Likelihood Estimator dari $\gamma(c)$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan berikut

$$\sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} (n d_{xj,t}) - \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} (n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x) + \hat{\kappa}_1(t) + (x - \bar{x}) \hat{\kappa}_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] \hat{\kappa}_3(t) + \gamma(c)}) = 0 \tag{3.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} (n d_{xj,t}) = \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} (n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x) + \hat{\kappa}_1(t) + (x - \bar{x}) \hat{\kappa}_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2] \hat{\kappa}_3(t) + \gamma(c)}) \tag{3.20}$$

Selanjutnya persamaan (3.20) dapat disederhanakan sebagai berikut

$$\hat{\gamma}(c) = \log \left\{ \frac{\sum_{t=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{n_a} W_c(t, x_j) n d_{xj,t}}{\sum_{t=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{n_a} W_c(t, x_j) n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x_j) + \hat{\kappa}_1(t) + (x_j - \bar{x}) \hat{\kappa}_2(t) + [(x_j - \bar{x})^2 - \sigma^2] \hat{\kappa}_3(t)}} \right\} \tag{3.21}$$

Untuk $c = 1, \dots, n_c$ dimana fungsi $W_c(t, x)$ memenuhi persamaan berikut

$$W_c(t, x_j) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ jika } \begin{cases} t - x = c \\ t - x \neq c \end{cases}$$

3.3. Evaluasi Model CBDX

Setelah memperoleh nilai-nilai estimasi untuk seluruh parameter yang diperlukan dalam perhitungan ${}_n m_{x,t}$ pada model CBDX, maka langkah selanjutnya adalah melakukan perhitungan untuk ${}_n m_{x,t}$ yang akan diberikan pada persamaan berikut,

$${}_n \hat{m}_{x,t} = \exp \hat{\alpha}(x) + \hat{\kappa}_1(t) + (x - \bar{x})\hat{\kappa}_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\hat{\kappa}_3(t) + \hat{\gamma}(c) \quad (3.22)$$

Kemudian setelah diperoleh nilai estimasi ${}_n \hat{m}_{x,t}$ untuk masing-masing usia dan periode akan dilakukan perhitungan MAPE untuk masing-masing usia pada seluruh periode sebagai berikut.

$$\text{MAPE} = \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p \left| \frac{{}_n m_{x,t} - {}_n \hat{m}_{x,t}}{{}_n m_{x,t}} \right| \times 100\% \quad (3.23)$$

Dengan p merupakan periode jumlah periode pengamatan.

Perhitungan MAPE dilakukan untuk melihat akurasi model CBDX dalam mengestimasi ${}_n \hat{m}_{x,t}$.

Setelah memperoleh nilai estimasi ${}_n m_{x,t}$ untuk memodelkan tingkat mortalitas penduduk Indonesia, nilai dari ${}_n q_{x,t}$ dapat dihitung melalui persamaan berikut yang juga sudah didefinisikan pada persamaan (2.22)

$${}_n q_{x,t} = 1 - \exp(-n \times {}_n \hat{m}_{x,t}) \quad (3.24)$$

Kemudian akan dilakukan kembali perhitungan untuk nilai galat dengan menggunakan metrik evaluasi MAPE untuk masing-masing usia pada seluruh periode menggunakan persamaan berikut

$$\text{MAPE} = \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p \left| \frac{{}_n q_{x,t} - {}_n \hat{q}_{x,t}}{{}_n q_{x,t}} \right| \times 100\% \quad (3.25)$$

Dengan p merupakan periode jumlah periode pengamatan.

3.4. Peramalan Tingkat Mortalitas menggunakan Model CBDX

Parameter model CBDX yang berubah terhadap waktu adalah parameter $\kappa_i(t)$ sementara dua parameter lainnya yaitu $\alpha(x)$ dan $\gamma(c)$ tidak berubah terhadap waktu. Dengan kata lain, untuk dapat meramalkan tingkat mortalitas pada waktu $(t + 1)$ menggunakan model CBDX maka pertama-tama perlu dilakukan prediksi terhadap nilai parameter $\kappa_i(t + 1)$ menggunakan model runtun-waktu yang sesuai. Misalkan nilai prediksi parameter $\kappa_i(t + 1)$ adalah $\widehat{\kappa}_i(t + 1)$ maka persamaan prediksi tingkat mortalitas pada waktu $(t + 1)$ adalah

$${}_n\widehat{q}_{x,t+1} = 1 - \exp(-n \times {}_n\widehat{m}_{x,t+1}) \quad (3.26)$$

dengan

$$\begin{aligned} {}_n\widehat{m}_{x,t+1} = & \exp \widehat{\alpha}(x) + \widehat{\kappa}_1(t + 1) + (x - \bar{x})\widehat{\kappa}_2(t + 1) \\ & + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\widehat{\kappa}_3(t + 1) + \widehat{\gamma}(c) \end{aligned} \quad (3.27)$$

BAB 4

APLIKASI DATA

Pada bab ini akan diimplementasikan model CBDX untuk menghitung nilai dari *Central Death Rate* atau ${}_n m_{x,t}$ yang selanjutnya dari nilai ${}_n m_{x,t}$ ini akan dihitung tingkat mortalitasnya atau ${}_n q_{x,t}$. Dalam pengimplemetasian model CBDX ini akan dilakukan pengestimasian parameter-parameter pada model CBDX yaitu, $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ serta perhitungan terhadap nilai ${}_n m_{x,t}$ yang akan dilakukan menggunakan perangkat lunak R Studio dan juga Microsoft Excel dengan spesifikasi komputer dan perangkat lunak yang digunakan adalah sebagai berikut:

Prosesor	: AMD Ryzen 5 4600H with Radeon Graphics, ~3.0GHz
GPU	: NVIDIA GeForce GTX 1650 Ti
RAM	: 16384MB
Sistem Operasi	: Windows 11 Home Single 64-bit (10.0)
Perangkat Lunak	: Rstudio (R Versi 4.3.3) & Microsoft Excel (Versi 16.0)

4.1. Data *Central Death Rate* Indonesia

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data *Central Death Rate* ${}_n m_{x,t}$ Indonesia. Data ini diperoleh dari situs resmi Perserikatan Bangsa-Bangsa (PBB) yang dapat diakses di laman <https://population.un.org/wpp/Download/Standard/Mortality/> . Data tersebut disajikan untuk umur 0 tahun, 1 tahun, 5 tahun, 10 tahun, 15 tahun, 20 tahun, dan seterusnya dalam kelipatan 5 tahun hingga umur 90 tahun. Data tersebut tersedia dalam rentang 72 tahun dimulai dari tahun 1950—2021. Berikut merupakan kutipan data yang digunakan dalam penelitian ini yang sebagian data disajikan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Data ${}_n m_{x,t}$ Indonesia

x	n	${}_n m_{x,t}$ 1950	${}_n m_{x,t}$ 1951	${}_n m_{x,t}$ 1952	...	${}_n m_{x,t}$ 2020	${}_n m_{x,t}$ 2021
0	1	0.21804	0.21491	0.20866	...	0.01950	0.01887
1	4	0.03920	0.03836	0.03640	...	0.00100	0.00096
5	5	0.00864	0.00848	0.00806	...	0.00051	0.00050
10	5	0.00494	0.00486	0.00463	...	0.00047	0.00047
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
35	5	0.01100	0.01083	0.00933	...	0.00252	0.00283
40	5	0.01251	0.01237	0.01046	...	0.00378	0.00424
45	5	0.01417	0.01406	0.01201	...	0.00595	0.00675
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	5	0.17249	0.17273	0.17202	...	0.14472	0.16166
85	5	0.24510	0.24561	0.24496	...	0.23173	0.25969
90	5	0.33158	0.33253	0.33207	...	0.32444	0.35350

Setelah membahas terkait data yang digunakan pada pengerjaan penelitian ini, langkah selanjutnya adalah melakukan tahapan-tahapan pengestimasi parameter-parameter yang diperlukan untuk model CBDX yaitu, $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ yang kemudian akan digunakan untuk menghitung nilai ${}_n m_{x,t}$ untuk penduduk Indonesia.

4.2. Estimasi Parameter Model CBDX dan Hasil Evaluasinya

Pada subbab ini parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ pada model CBDX3 untuk penduduk Indonesia akan diestimasi dengan menggunakan metode *Sequential Maximul Likelihood*, metode ini memungkinkan penanganan langsung terhadap distribusi

dari data kematian yang diasumsikan, sehingga asumsi bahwa suatu data mengikuti suatu distribusi tertentu dapat digunakan meskipun data aktual mungkin tidak sepenuhnya sesuai dengan distribusi tersebut (Hunt & Blake, 2020b). Serta metode aproksimasi menggunakan metode BFGS yang langkah-langkahnya telah dijelaskan pada subbab 3.2 dan menggunakan data-data yang disajikan pada Tabel 4.1. Dalam penelitian ini, proses pengestimasi parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ pada model CBDX3 akan dilakukan dengan 2 skenario, antara lain:

1. Skenario 1: Pengestimasi parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ tanpanya ada pengelompokan kategori usia, dimana seluruh parameter diestimasi secara bersamaan dari usia 0 sampai dengan usia 90 tahun.
2. Skenario 2: Pengestimasi parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ dilakukan dengan mengelompokkan usia-usia kedalam beberapa kelompok usia berdasarkan rekomendasi dari (World Health Organisation, 2013) sebagai berikut:
 - a. Di bawah 5 tahun : usia < 5 tahun
 - b. Remaja : $5 \leq \text{usia} < 20$ tahun
 - c. Dewasa : $20 \leq \text{usia} < 40$ tahun
 - d. Paruh baya : $\leq 40 \text{ tahun} < 65$ tahun
 - e. Lanjut usia : usia ≥ 65 tahun

Dua skenario diatas bertujuan untuk memvalidasi pernyataan bahwa model CBDX baik untuk mengestimasi nilai ${}_n m_{x,t}$ dari kelompok usia dewasa dengan rentang usia yang lebih luas.

4.2.1. Estimasi Parameter Model CBDX pada Skenario 1

Pada subbab 4.2.1 ini, dilakukan estimasi nilai parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ pada model CBDX untuk penduduk Indonesia dengan skenario 1 menggunakan data ${}_n m_{x,t}$ pada Tabel 4.1. Nilai estimasi dari parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ untuk usia 0-90 tahun dan tahun 1950-2021 diperoleh melalui formula (4.1), (4.2), (4.3) yang secara berturut-turut dalam kasus ini ditulis sebagai persamaan berikut dengan n_a yang merupakan banyak usia, n_y yang merupakan rentang tahun, serta n_c yang merupakan banyak tahun kelahiran dengan $n_a = 20$, $n_y = 72$, $n_c = 163$ sebagai berikut

$$\hat{\alpha}(x_j) = \log \left\{ \frac{\sum_{t=1}^{n_y} (n d_{xj,t})}{\sum_{t=1}^{n_y} (n L_{xj,t})} \right\} \quad (4.1)$$

Untuk $j = 1, \dots, n_a$, diperoleh

$$l(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} n d_{xj,t} (\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)) \\ - \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} + \text{constant} \quad (4.2)$$

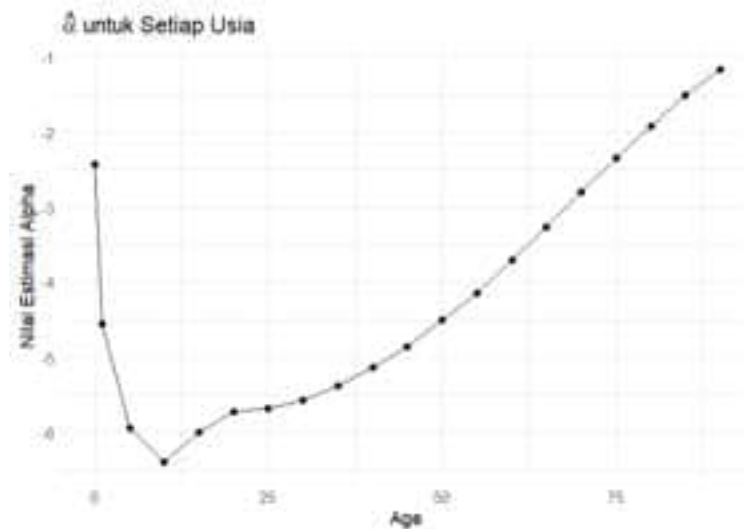
Untuk $j = 1, \dots, n_a$ dan Untuk $t = 1, \dots, n_y$, diperoleh

$$\hat{\gamma}(c) = \log \left\{ \frac{\sum_{t=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{n_a} W_c(t, x_j) n d_{xj,t}}{\sum_{t=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{n_a} W_c(t, x_j) n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x_j) + \hat{\kappa}_1(t) + (x_j - \bar{x})\hat{\kappa}_2(t) + [(x_j - \bar{x})^2 - \sigma^2]\hat{\kappa}_3(t)}} \right\} \quad (4.3)$$

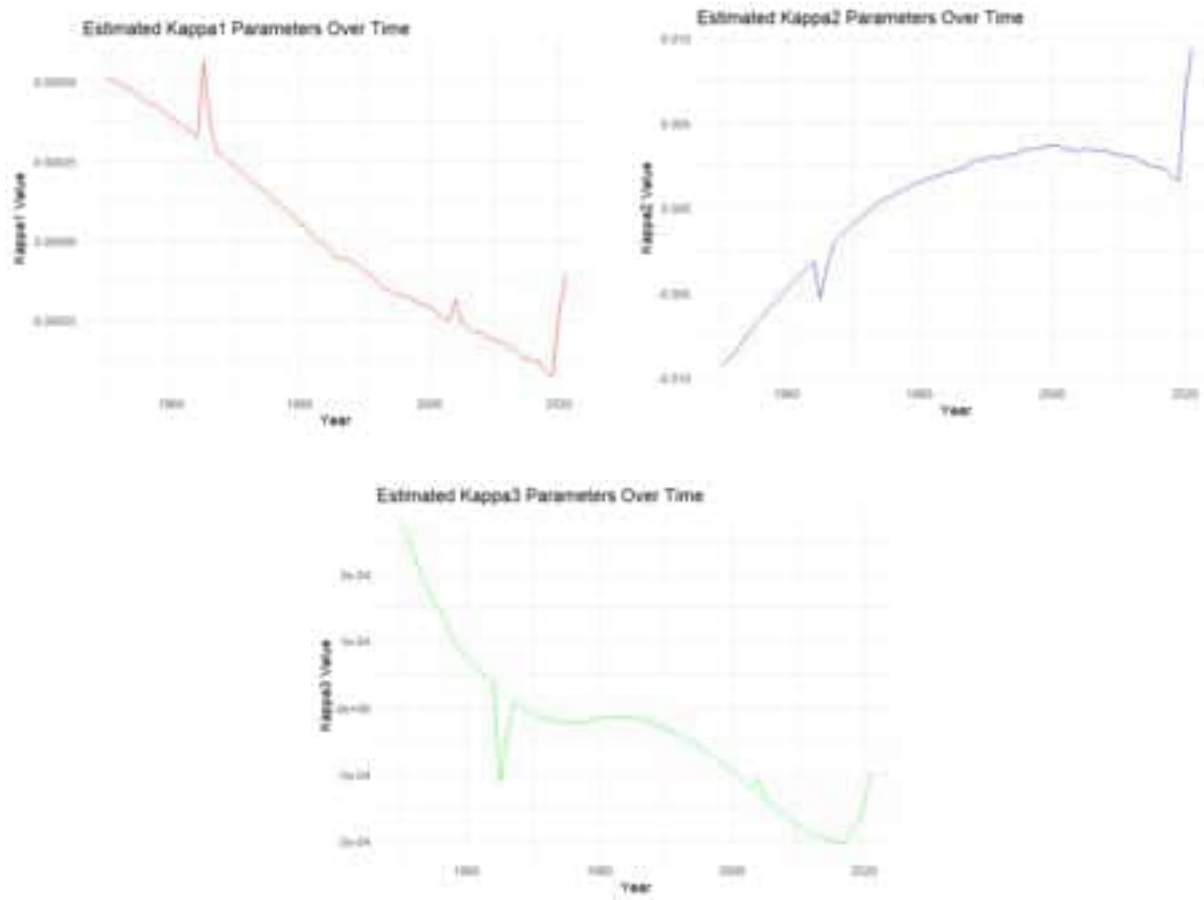
Untuk $c = 1, \dots, n_c$ dimana fungsi $W_c(t, x)$ memenuhi persamaan berikut

$$W_c(t, x_j) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ jika } \begin{cases} t - x = c \\ t - x \neq c \end{cases}$$

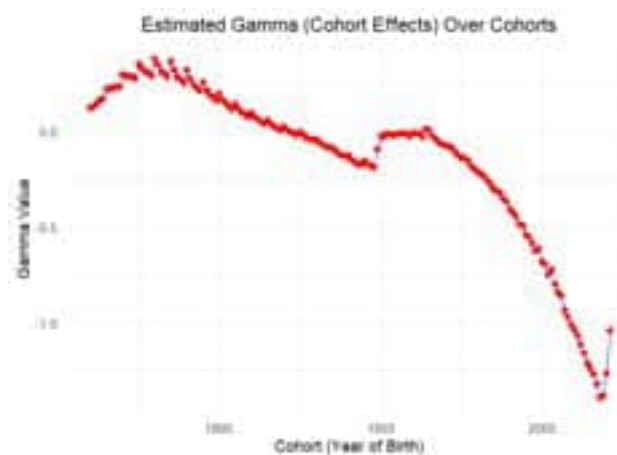
Visualisasi dari perhitungan nilai estimasi $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ untuk penduduk Indonesia pada skenario 1 diberikan oleh gambar-gambar berikut (Hasil lengkap estimasi terdapat pada lampiran)



Gambar 4.1. Visualisasi dari Estimasi Nilai $\alpha(x)$ untuk Seluruh Usia pada Skenario 1



Gambar 4.2. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ pada Skenario 1



Gambar 4.3. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ pada Skenario 1

Pada hasil estimasi untuk skenario 1, nilai $\alpha(x)$ menunjukkan peningkatan risiko kematian seiring bertambahnya usia. Nilai $\kappa_1(t)$ menurun, menandakan penurunan umum dalam tingkat kematian dari waktu ke waktu. Peningkatan nilai $\kappa_2(t)$ menunjukkan bahwa perbedaan tingkat kematian antara kelompok usia menjadi lebih signifikan. $\kappa_3(t)$ menunjukkan fluktuasi kompleks, mengindikasikan adanya efek non-linear dari usia pada tingkat kematian. Sementara itu, $\gamma(c)$ menurun untuk kohort yang lebih baru, menunjukkan bahwa generasi yang lahir lebih awal memiliki risiko kematian yang lebih tinggi dibandingkan dengan kohort yang lebih baru

Setelah melakukan pengestimasi parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ untuk penduduk Indonesia, maka selanjutnya adalah melakukan evaluasi hasil estimasi nilai parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ dengan melihat nilai MAPE antara nilai ${}_n\hat{m}_{x,t}$ pada skenario 1 ini dengan nilai ${}_nm_{x,t}$ aktual dari penduduk Indonesia. Sebelum melakukan evaluasi akan dilakukan terlebih dahulu perhitungan terhadap nilai ${}_n\hat{m}_{x,t}$ penduduk Indonesia dengan menggunakan persamaan (3.22) pada subbab (3.3) yang ditulis kembali sebagai persamaan berikut

$${}_nm_{x,t} = \exp \alpha(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t) + \gamma(c)$$

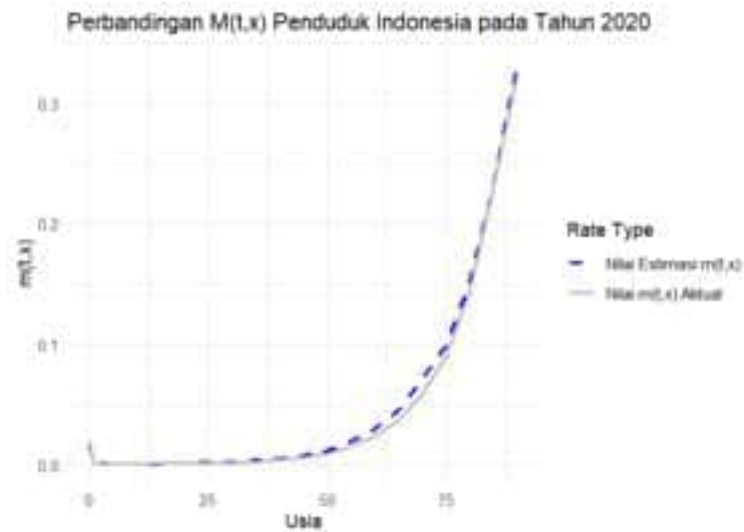
Dengan menggunakan nilai parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ yang sudah diperoleh dari perhitungan sebelumnya. Hasil dari perhitungan ${}_n\hat{m}_{x,t}$ penduduk Indonesia pada skenario 1 diperoleh dan ditampilkan pada Tabel 4.2

Tabel 4.2. Nilai Estimasi ${}_nm_{t,x}$ Penduduk Indonesia pada Skenario 1

x	n	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 1950	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 1951	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 1952	...	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 2020	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 2021
0	1	0.168435	0.163647	0.15845	...	0.016069	0.018872
1	4	0.018063	0.018873	0.017928	...	0.001724	0.00182
5	5	0.003749	0.003612	0.003445	...	0.000536	0.000484

10	5	0.002145	0.002072	0.001997	...	0.000456	0.000413
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
35	5	0.004265	0.00422	0.004234	...	0.003574	0.003354
40	5	0.005314	0.005249	0.005284	...	0.005183	0.004933
45	5	0.007057	0.006945	0.006994	...	0.00769	0.007441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	5	0.163562	0.1631	0.162662	...	0.153277	0.169446
85	5	0.241163	0.24092	0.240539	...	0.234345	0.267894
90	5	0.331582	0.332534	0.332073	...	0.333884	0.39557

Berikut diberikan beberapa visualisasi perbandingan grafik antara tingkat mortalitas aktual ${}_n m_{x,t}$ penduduk Indonesia dan tingkat mortalitas estimasi ${}_n \hat{m}_{x,t}$ penduduk Indonesia pada skenario 1, pada usia 30 dan 75 tahun dari waktu ke waktu, dan juga untuk seluruh usia pada tahun 2020 yang masing masing disajikan pada gambar berikut.



Gambar 4.4. Nilai ${}_n m_{x,t}$ Aktual dan Nilai ${}_n \hat{m}_{x,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia pada Tahun 2020 pada Skenario 1



Gambar 4.5. Nilai ${}_n m_{x,t}$ Aktual dan Nilai ${}_n \hat{m}_{x,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia pada Usia 20 Tahun dan 75 Tahun pada Skenario 1

Setelah didapatkan nilai $\hat{m}_{x,t}$ estimasi penduduk Indonesia pada skenario 1, langkah berikutnya adalah melakukan evaluasi keakurasian hasil estimasi dengan melakukan perhitungan MAPE untuk setiap usia dengan menggunakan persamaan berikut

$$\text{MAPE} = \frac{1}{72} \sum_{t=1}^{72} \left| \frac{{}_n m_{x,t} - {}_n \hat{m}_{x,t}}{{}_n m_{x,t}} \right| \times 100\%$$

Setelah dilakukan perhitungan nilai MAPE menggunakan persamaan diatas, hasil yang diperoleh disajikan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3. MAPE dari Hasil Estimasi nilai ${}_n m_{x,t}$ pada Skenario 1 untuk Penduduk Indonesia

Usia	MAPE	Usia	MAPE
0	24.4%	45	31.3%
1	44.3%	50	25.2%
5	26.8%	55	19.1%
10	25.2%	60	15.8%
15	22.3%	65	11.7%
20	33.0%	70	9.5%
25	42.4%	75	8.5%
30	47.0%	80	9.7%
35	45.4%	85	11.9%

40	39.9%	90	15.2%
----	-------	----	-------

Berdasarkan Tabel 4.3 diperoleh informasi bahwa hampir setiap usia masih memiliki nilai MAPE yang tinggi dimana nilai MAPE lebih dari 10%, dimana hal ini mengindikasikan hasil estimasi ${}_n m_{x,t}$ untuk penduduk Indonesia masih kurang baik, akan tetapi jika ditelaah lebih lanjut untuk usia dewasa dimulai dari usia 40 sampai usia 90 secara bertahap memiliki kecenderungan untuk memiliki nilai MAPE yang menurun sampai pada titik terendahnya dapat mencapai 8.5% pada usia 75 tahun. Hal ini sejalan dengan metode CBDX yang mengasumsikan model ini lebih baik dalam mengestimasi nilai ${}_n m_{t,x}$ pada rentang usia dewasa. Berdasarkan hasil dari skenario 1 dimana hasil dari estimasi ${}_n m_{x,t}$ yang masih memiliki nilai MAPE yang kurang baik, dilakukan estimasi nilai ${}_n m_{x,t}$ penduduk Indonesia menggunakan skenario 2.

4.2.2. Estimasi Parameter Model CBDX pada Skenario 2

Pada subbab 4.2.2 ini, dilakukan estimasi nilai parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ pada model CBDX untuk penduduk Indonesia dengan skenario 2 menggunakan data ${}_n m_{x,t}$ pada Tabel 4.1. Dalam skenario 2 ini, terdapat 5 kategori usia penduduk Indonesia yang memiliki formula estimasi $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ yang berbeda-beda. Berikut ini diberikan formula untuk mengestimasi nilai parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ untuk masing-masing kategori usia.

Secara umum proses estimasi untuk nilai parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ pada skenario 1 dan skenario 2 masih menggunakan persamaan yang sama akan tetapi terdapat penyesuaian untuk masing-masing kelompok umur dengan pembagian n_a , n_y , dan n_c sebagai berikut,

Tabel 4.4. Pembagian n_a , n_y , dan n_c per Kelompok Usia

Usia	n_a	n_y	n_c
0 & 1	2	72	73

$(5 \leq x < 20)$	3	72	82
$(20 \leq x < 40)$	4	72	87
$(40 \leq x < 65)$	5	72	92
≥ 65	6	72	97

Perhitungan untuk mengestimasi nilai masing-masing parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ per kelompok umur akan mengikuti ketentuan untuk n_a , n_y , dan n_c yang ada pada Tabel 4.4

$$\hat{\alpha}(x_j) = \log \left\{ \frac{\sum_{t=1}^{n_y} (n d_{xj,t})}{\sum_{t=1}^{n_y} (n L_{xj,t})} \right\} \quad (4.4)$$

Untuk $j = 1, \dots, n_a$

$$l(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} n d_{xj,t} (\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)) - \sum_{j=1}^{n_a} \sum_{t=1}^{n_y} n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t)} + \text{constant} \quad (4.5)$$

Untuk $j = 1, \dots, n_a$

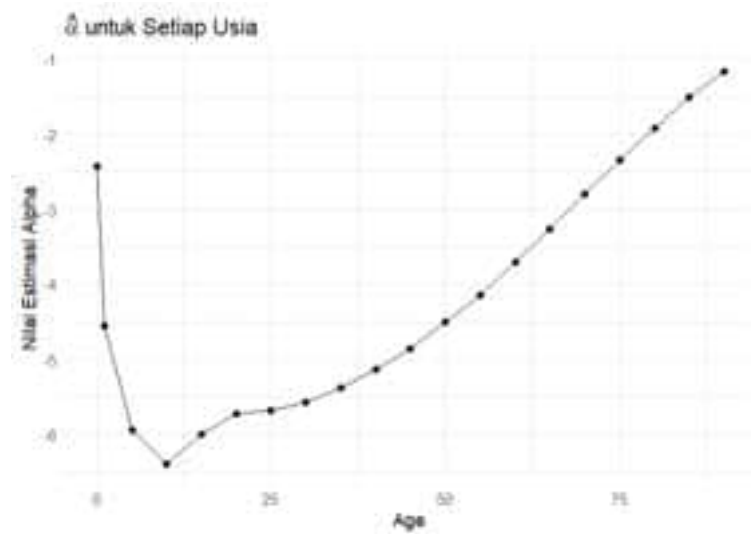
Untuk $t = 1, \dots, n_y$

$$\hat{\gamma}(c) = \log \left\{ \frac{\sum_{t=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{n_a} W_c(t, x_j) n d_{xj,t}}{\sum_{t=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{n_a} W_c(t, x_j) n L_{xj,t} e^{\hat{\alpha}(x_j) + \hat{\kappa}_1(t) + (x_j - \bar{x})\hat{\kappa}_2(t) + [(x_j - \bar{x})^2 - \sigma^2]\hat{\kappa}_3(t)}} \right\} \quad (4.6)$$

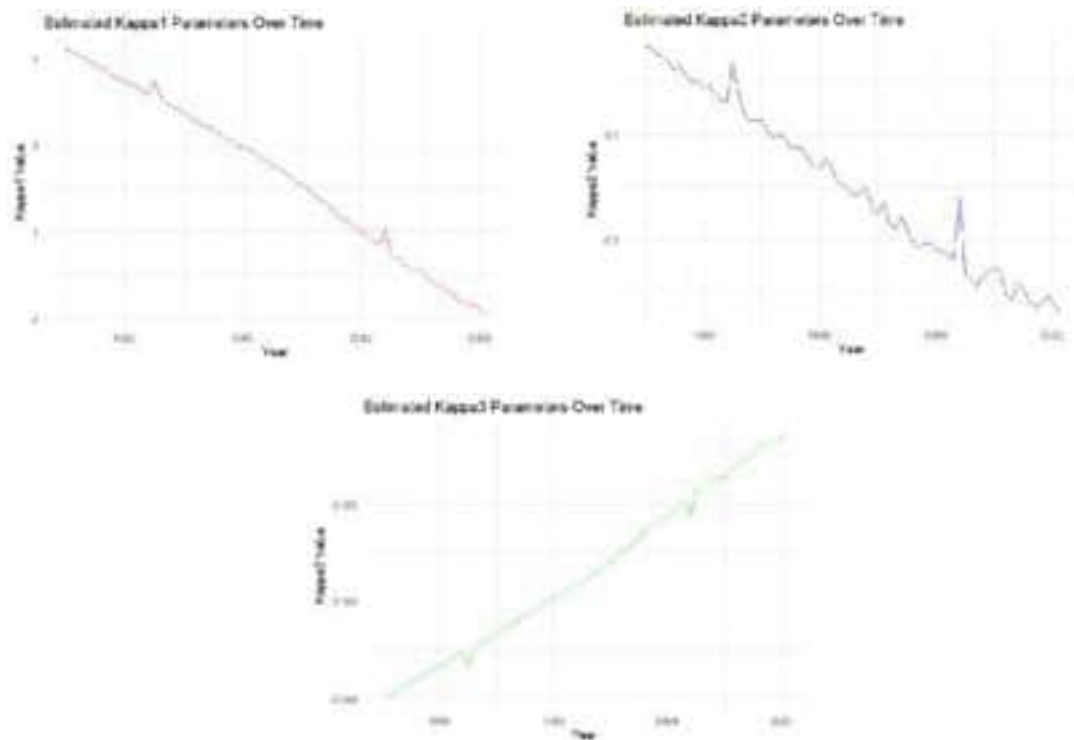
Untuk $c = 1, \dots, n_c$ dimana fungsi $W_c(t, x)$ memenuhi persamaan berikut

$$W_c(t, x_j) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ jika } \begin{cases} t - x = c \\ t - x \neq c \end{cases}$$

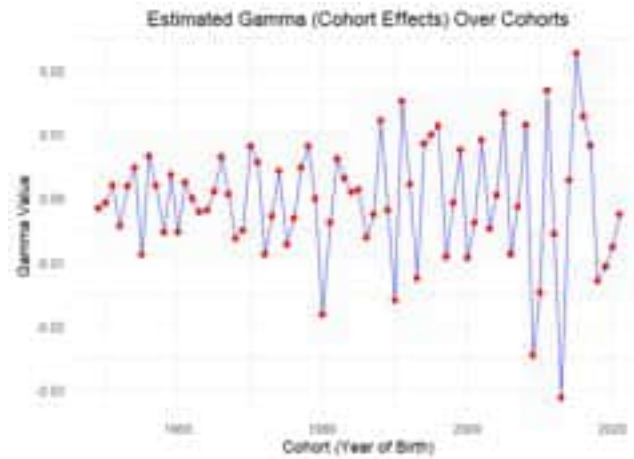
Visualisasi dari perhitungan nilai estimasi $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ untuk penduduk Indonesia dan untuk masing-masing kelompok usia pada skenario 2 diberikan oleh gambar-gambar berikut (Hasil lengkap estimasi terdapat pada lampiran)



Gambar 4.6. Visualisasi dari Estimasi Nilai $\alpha(x)$ untuk Seluruh Usia pada Skenario 2

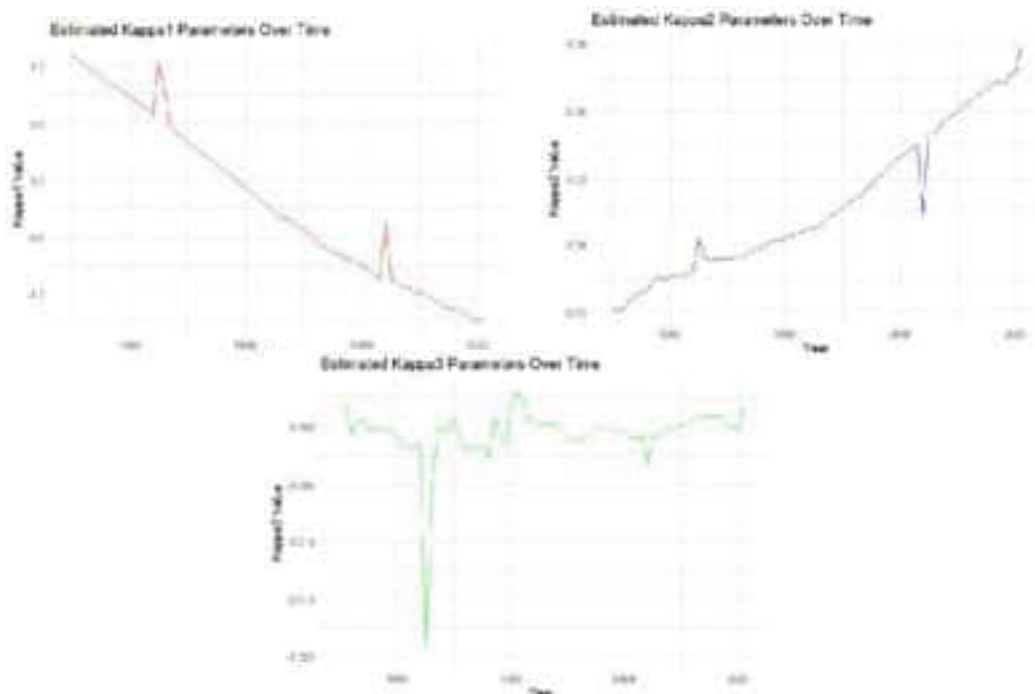


Gambar 4.7. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk Kelompok Usia 0 & 1 pada Skenario 2

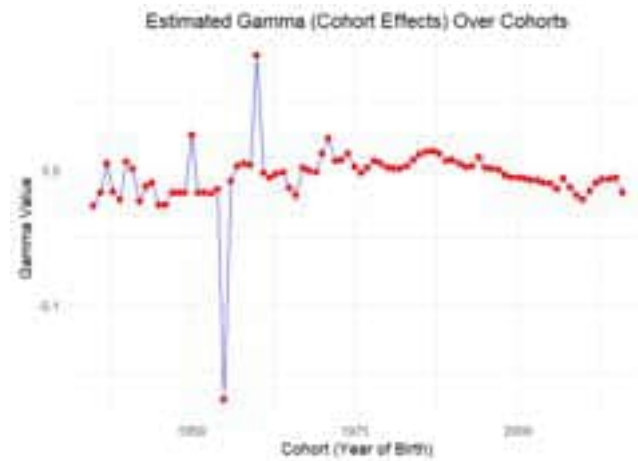


Gambar 4.8. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 0 &1 pada Skenario 2

Untuk usia 0 dan 1 tahun, model CBDX menunjukkan bahwa $\kappa_1(t)$ menurun secara konsisten dari tahun 1950 hingga 2020, menandakan penurunan risiko kematian bayi. $\kappa_2(t)$ juga menurun, mengindikasikan bahwa pengaruh usia terhadap risiko kematian bayi menjadi kurang signifikan. $\kappa_3(t)$ meningkat, menunjukkan adanya pola non-linear yang semakin kompleks dalam risiko kematian bayi. Sementara itu, $\gamma(c)$ menunjukkan fluktuasi antar kohort tanpa tren yang jelas, menandakan bahwa tahun kelahiran memiliki efek bervariasi pada risiko kematian bayi..

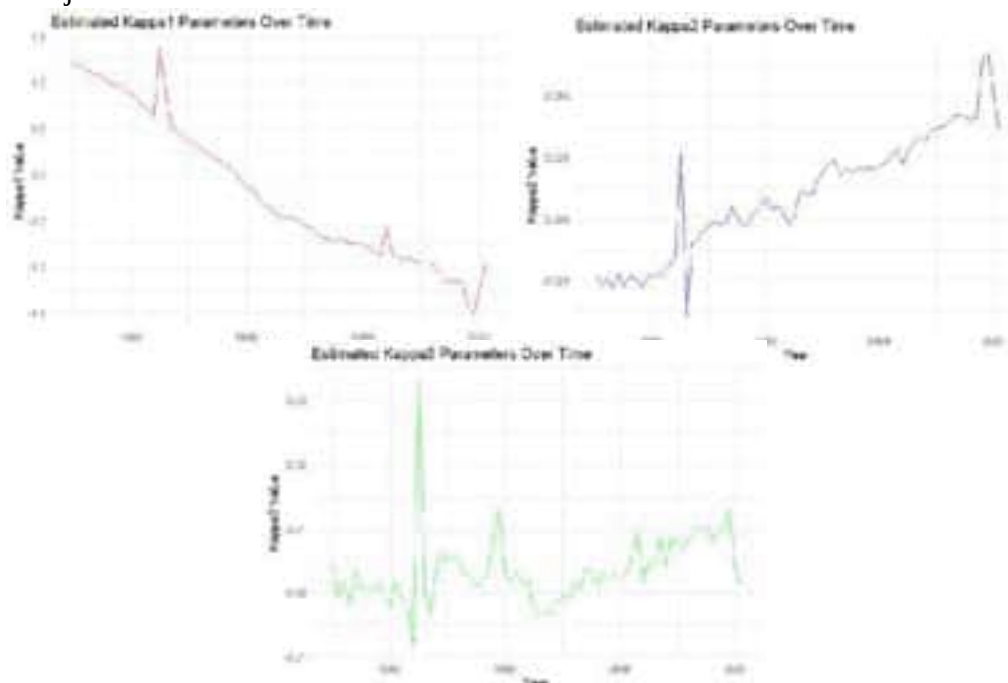


Gambar 4.9. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk Kelompok Usia 5, 10, dan 15 pada Skenario 2

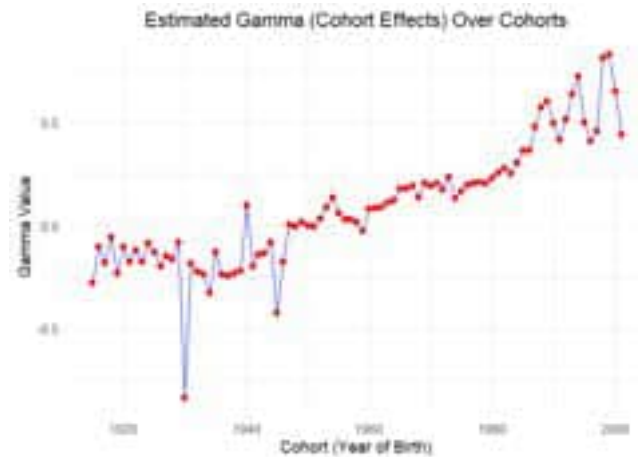


Gambar 4.10. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 5, 10, dan 15 pada Skenario 2

Untuk usia 5, 10, dan 15 tahun, model CBDX menunjukkan bahwa $\kappa_1(t)$ menurun secara konsisten dari tahun 1950 hingga 2020, mencerminkan penurunan risiko kematian anak-anak dan remaja. $\kappa_2(t)$ meningkat, menunjukkan bahwa perbedaan risiko kematian berdasarkan usia menjadi lebih signifikan. $\kappa_3(t)$ menunjukkan fluktuasi yang kompleks, mengindikasikan pola non-linear dalam risiko kematian yang dipengaruhi oleh berbagai faktor. Sementara itu, $\gamma(c)$ menunjukkan fluktuasi antar kohort tanpa tren yang jelas, menunjukkan variasi dalam risiko kematian berdasarkan tahun kelahiran untuk anak-anak dan remaja.

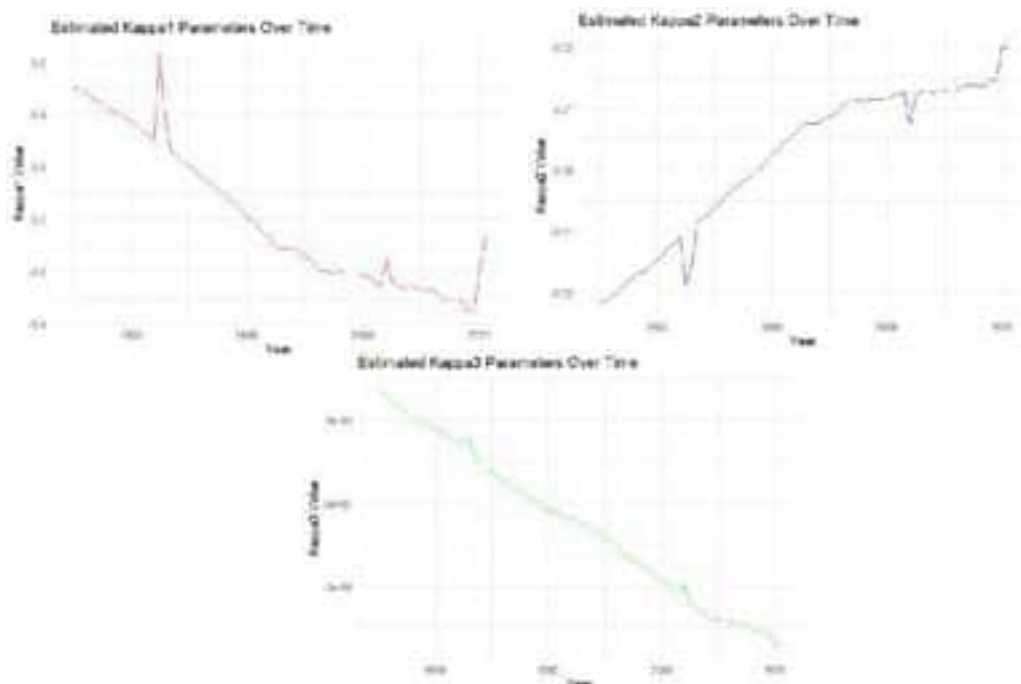


Gambar 4.11. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk Kelompok Usia 20, 25, 30, dan 35 pada Skenario 2

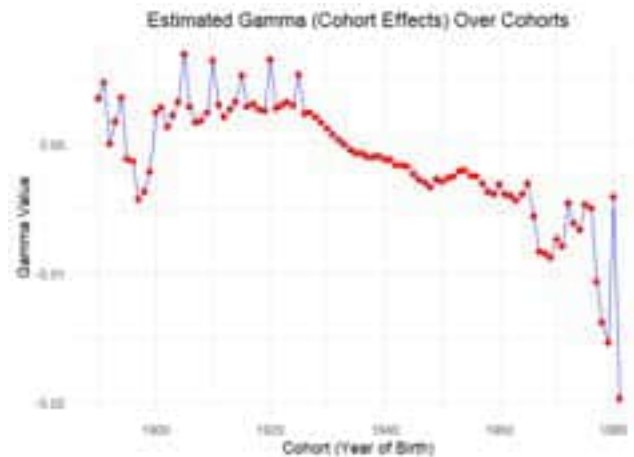


Gambar 4.12. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 20, 25, 30, dan 35 pada Skenario 2

Untuk usia 20, 25, 30, dan 35 tahun, $\kappa_1(t)$ menurun secara konsisten dari tahun 1950 hingga 2020, menandakan penurunan umum dalam risiko kematian orang dewasa muda selama periode ini. $\kappa_2(t)$ meningkat secara bertahap, yang menunjukkan bahwa perbedaan risiko kematian berdasarkan usia menjadi lebih signifikan seiring waktu. $\kappa_3(t)$ menunjukkan fluktuasi yang lebih kompleks dengan pola non-linear. Sementara itu, $\gamma(c)$ meningkat dengan fluktuasi antar kohort, menandakan bahwa efek tahun kelahiran pada risiko kematian untuk kelompok usia ini semakin signifikan, dengan kohort yang lebih baru cenderung memiliki risiko kematian yang sedikit lebih tinggi.

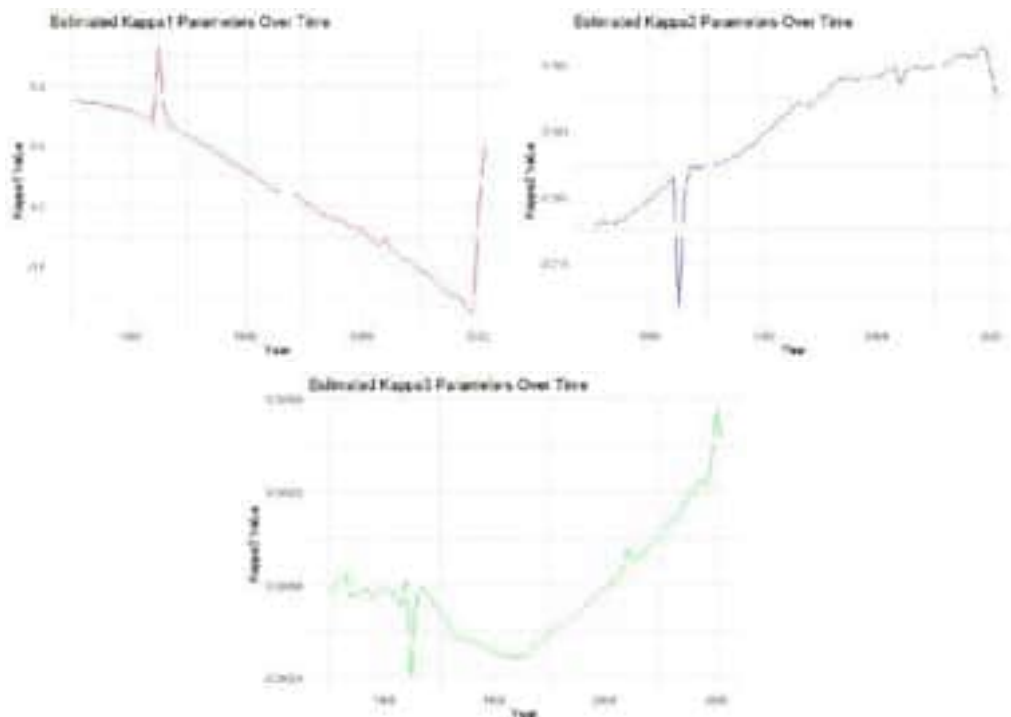


Gambar 4.13. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk Kelompok Usia 40, 45, 50, 55, dan 60 pada Skenario 2

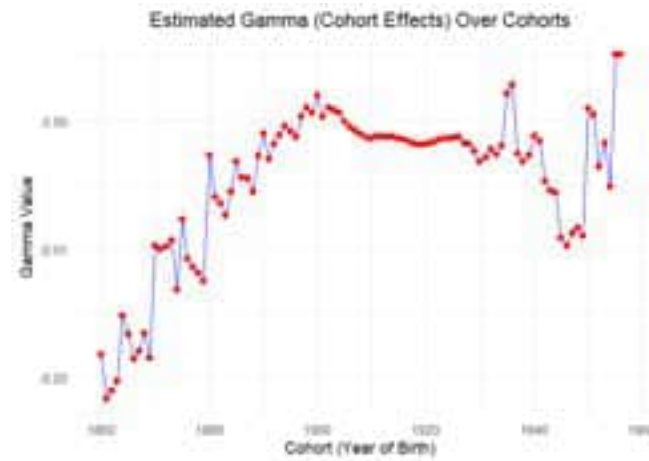


Gambar 4.14. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 40, 45, 50, 55, dan 60 pada Skenario 2

Untuk usia 40 hingga 60 tahun, $\kappa_1(t)$ menurun dari 1950 hingga 2020, menunjukkan penurunan risiko kematian. $\kappa_2(t)$ meningkat, menunjukkan perbedaan risiko kematian berdasarkan usia menjadi lebih signifikan. $\kappa_3(t)$ menurun, menunjukkan pola non-linear yang stabil dalam risiko kematian. Sementara itu, $\gamma(c)$ fluktuatif antar kohort, dengan tren penurunan setelah tahun 1960, menunjukkan risiko kematian yang lebih rendah bagi generasi yang lebih baru.



Gambar 4.15. Visualisasi dari Estimasi nilai $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk Kelompok Usia 65 sampai 90 Tahun pada Skenario 2



Gambar 4.16. Visualisasi dari Estimasi nilai $\gamma(c)$ untuk Kelompok Usia 65 sampai 90 Tahun pada Skenario 2

Untuk usia 65 tahun ke atas, $\kappa_1(t)$ menunjukkan penurunan secara konsisten dari tahun 1950 hingga 2020, yang menunjukkan penurunan risiko kematian bagi lansia. $\kappa_2(t)$ meningkat secara bertahap, menandakan bahwa perbedaan risiko kematian berdasarkan usia semakin signifikan seiring waktu. $\kappa_3(t)$ menunjukkan peningkatan, mengindikasikan adanya pola non-linear yang semakin kompleks dalam risiko kematian lansia. Sementara itu, $\gamma(c)$ menunjukkan fluktuasi yang signifikan antar kohort, dengan tren umum yang stabil namun ada peningkatan pada kohort yang lebih baru, menunjukkan variasi dalam risiko kematian berdasarkan tahun kelahiran.

Setelah melakukan pengestimasi parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ untuk penduduk Indonesia, maka selanjutnya adalah melakukan evaluasi hasil estimasi nilai parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ dengan melihat nilai MAPE antara nilai ${}_n\hat{m}_{x,t}$ pada skenario 2 ini dengan nilai ${}_nm_{x,t}$ aktual dari penduduk Indonesia. Sebelum melakukan evaluasi akan dilakukan terlebih dahulu perhitungan terhadap nilai ${}_n\hat{m}_{x,t}$ penduduk Indonesia pada skenario 2 dengan menggunakan persamaan (3.22) pada subbab (3.3) yang ditulis kembali sebagai persamaan berikut

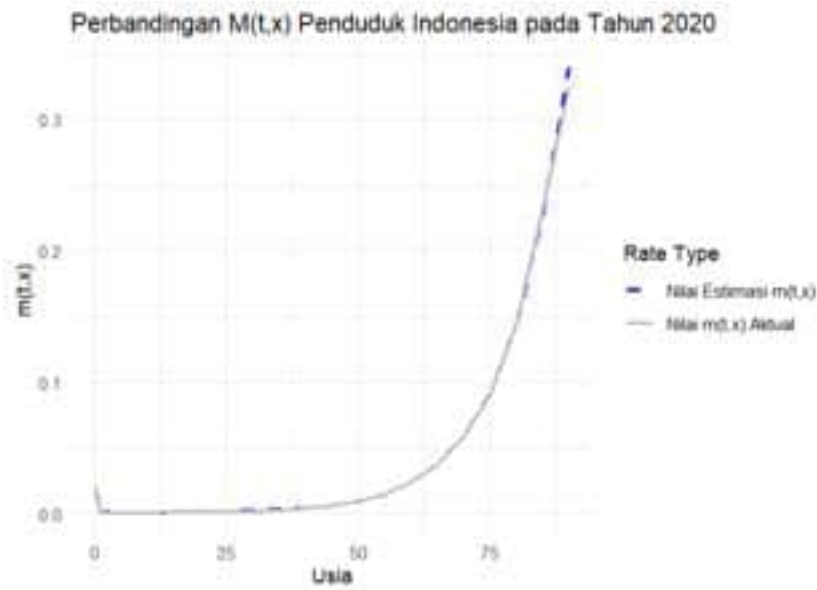
$${}_nm_{x,t} = \exp \alpha(x) + \kappa_1(t) + (x - \bar{x})\kappa_2(t) + [(x - \bar{x})^2 - \sigma^2]\kappa_3(t) + \gamma(c)$$

Dengan menggunakan nilai parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ untuk masing-masing kelompok umur yang sudah diestimasi untuk mengestimasi nilai ${}_n\hat{m}_{x,t}$. Hasil dari perhitungan ${}_n\hat{m}_{x,t}$ penduduk Indonesia pada skenario 2 diperoleh dan ditampilkan pada Tabel 4.5 (hasil lengkap terlampir pada lampiran)

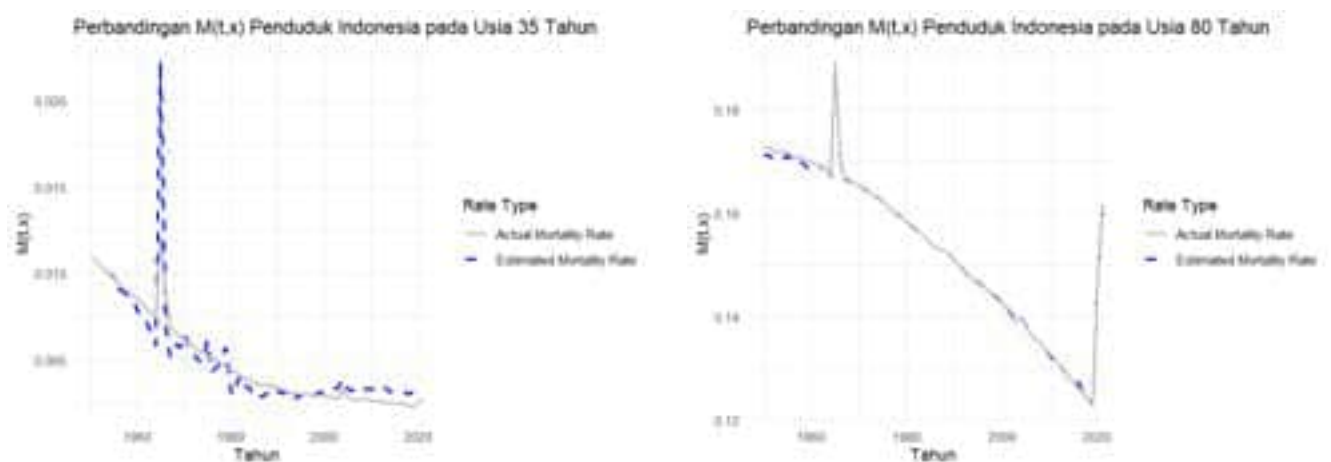
Tabel 4.5. Nilai Estimasi ${}_n\hat{m}_{x,t}$ Penduduk Indonesia pada Skenario 2

x	n	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 1950	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 1951	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 1952	...	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 2020	${}_n\hat{m}_{x,t}$ 2021
0	1	0.217773	0.215134	0.208352	...	0.0195	0.018872
1	4	0.039198	0.038442	0.036332	...	0.001031	0.000959
5	5	0.008768	0.008639	0.008118	...	0.000509	0.000499
10	5	0.004818	0.004732	0.004594	...	0.000478	0.000478
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
35	5	0.010996	0.010834	0.010459	...	0.003112	0.003399
40	5	0.012586	0.012377	0.012117	...	0.003782	0.004243
45	5	0.014254	0.014076	0.013853	...	0.005927	0.006733
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	5	0.171126	0.171268	0.170363	...	0.144112	0.160342
85	5	0.245165	0.24551	0.244593	...	0.22645	0.249195
90	5	0.331582	0.332534	0.332073	...	0.339476	0.36748

Berikut diberikan beberapa visualisasi perbandingan grafik antara tingkat mortalitas aktual ${}_nm_{x,t}$ penduduk Indonesia dan tingkat mortalitas estimasi ${}_n\hat{m}_{x,t}$ penduduk Indonesia pada skenario 2, pada usia 30 dan 75 untuk setiap tahun, dan untuk setiap usia pada tahun 2020 yang masing masing disajikan pada gambar



Gambar 4.17. Nilai ${}_n m_{x,t}$ Aktual dan Nilai ${}_n \hat{m}_{x,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia pada Tahun 2020 pada Skenario 2



Gambar 4.18. Nilai ${}_n m_{x,t}$ Aktual dan Nilai ${}_n \hat{m}_{x,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia Pada Usia 35 dan 80 Tahun pada Skenario 2

Setelah didapatkan nilai ${}_n \hat{m}_{t,x}$ estimasi penduduk Indonesia pada skenario 2, langkah berikutnya adalah melakukan evaluasi keakurasian hasil estimasi dengan melakukan perhitungan MAPE dengan menggunakan persamaan berikut

$$\text{MAPE} = \frac{1}{72} \sum_{t=1}^{72} \left| \frac{{}_n m_{x,t} - {}_n \hat{m}_{x,t}}{{}_n m_{x,t}} \right| \times 100\%$$

Setelah dilakukan perhitungan nilai MAPE menggunakan persamaan diatas, hasil yang diperoleh disajikan pada Tabel (bawah).

Tabel 4.6. MAPE dari Hasil Estimasi nilai $m_{t,x}$ pada Skenario 2 untuk
Penduduk Indonesia

Usia	MAPE	Usia	MAPE
0	0.5%	45	0.4%
1	1.6%	50	0.5%
5	1.0%	55	0.5%
10	1.8%	60	0.2%
15	1.1%	65	0.4%
20	15.6%	70	0.4%
25	11.9%	75	0.3%
30	11.9%	80	0.2%
35	14.5%	85	0.6%

40	0.3%	90	1.2%
----	------	----	------

Berdasarkan Tabel 4.6 diperoleh informasi bahwa hampir setiap usia sudah memiliki nilai MAPE cukup rendah kecuali untuk beberapa usia, pada rentang 20 hingga 35 tahun, masih memiliki nilai yang tinggi dimana nilai MAPE lebih dari 10%. Lebih lanjut lagi, jika dibandingkan dengan nilai MAPE pada skenario 1 terjadi peningkatan yang signifikan dalam akurasi model dalam mengestimasi nilai ${}_n m_{x,t}$ penduduk Indonesia dengan mayoritas nilai MAPE sudah berada di bawah 10%. Selanjutnya untuk rentang usia 40 sampai 90 tahun secara keseluruhan sudah sangat baik dengan mencapai nilai MAPE $\pm 1\%$, selain itu nilai MAPE terendah dicapai pada usia 80 tahun sebesar 0.2% yang memberikan informasi bahwa model CBDX sudah sangat baik dalam mengestimasi nilai ${}_n m_{x,t}$ penduduk Indonesia dewasa (di atas usia 40 tahun). Hasil nilai MAPE pada skenario 2 ini juga masih sejalan dengan metode CBDX yang mengasumsikan model ini lebih baik dalam mengestimasi nilai ${}_n m_{x,t}$ pada rentang usia dewasa.

4.3. Perbandingan Performa Model CBDX dalam Mengestimasi Tingkat Mortalitas

Pada subbab sebelumnya nilai central death rate ${}_n m_{x,t}$ penduduk Indonesia usia dewasa (40-90) tahun dapat diestimasi dengan baik menggunakan model CBDX yang paling kompleks yaitu model CBDX 3 yang terdiri dari parameter $\alpha(x), \kappa_1(t), \kappa_2(t), \kappa_3(t), \gamma(c)$. Pada subbab ini ingin diamati apakah model tersebut masih dapat disederhanakan menjadi model CBDX 2 yang terdiri dari parameter $\alpha(x), \kappa_1(t), \kappa_2(t), \gamma(c)$ atau CBDX 1 yang terdiri dari parameter $\alpha(x), \kappa_1(t), \gamma(c)$. Untuk tujuan tersebut maka *Central Death Rate* penduduk Indonesia usia dewasa dapat dimodelkan kembali dengan model CBDX 1 dan CBDX 2. Nilai MAPE yang dihasilkan oleh masing-masing model CBDX diberikan pada Tabel 4.7 berikut

Usia	CBDX 1	CBDX 2	CBDX 3
------	--------	--------	--------

40	13.2%	19.9%	3.2%
45	8.8%	15.8%	1.3%
50	8.6%	12.6%	1.0%
55	8.8%	11.0%	2.2%
60	7.2%	7.7%	0.8%
65	5.7%	5.6%	0.6%
70	2.6%	3.7%	1.0%
75	3.1%	4.9%	0.9%
80	5.5%	6.3%	0.6%
85	8.4%	7.4%	1.5%
90	11.2%	8.4%	3.0%

Tabel 4.7. Nilai MAPE dari Model CBDX 1, CBDX 2, CBDX 3

Berdasarkan Tabel 4.7, dapat dilihat nilai MAPE yang diperoleh dari CBDX 3 untuk setiap usia memiliki nilai terendah jika dibandingkan dengan MAPE dari CBDX 1 dan

CBDX 2. Lebih lanjut rata-rata MAPE dari CBDX 3 juga merupakan yang terendah , yaitu sebesar 1.5%. Hal tersebut mengindikasikan model CBDX 3 lebih cocok untuk memodelkan *Central Death Rate* penduduk Indonesia usia dewasa.

4.4. Perhitungan Tingkat Mortalitas Indonesia

Tahapan terakhir dalam penelitian ini adalah melakukan perhitungan tingkat mortalitas penduduk Indonesia menggunakan nilai ${}_n\hat{m}_{x,t}$ yang sudah didapatkan pada perhitungan sebelumnya dengan persamaan berikut,

$${}_nq_{x,t} = 1 - \exp(-n \times {}_n\hat{m}_{x,t}) \quad (4.7)$$

Sebelum dilakukan perhitungan untuk nilai ${}_nq_{x,t}$ akan diberikan terlebih dahulu kutipan data dari ${}_nq_{x,t}$ atau tingkat mortalitas penduduk Indonesia dari tahun 1950-2021 untuk rentang usia 0-90 yang disajikan pada Tabel 4.8

Tabel 4.8. Nilai ${}_nq_{x,t}$ Aktual Penduduk Indonesia

x	n	${}_nq_{x,t}$ 1950	${}_nq_{x,t}$ 1951	${}_nq_{x,t}$ 1952	...	${}_nq_{x,t}$ 2020	${}_nq_{x,t}$ 2021
0	1	0.18914	0.18678	0.18204	...	0.01917	0.01856
1	4	0.14265	0.13989	0.13334	...	0.00398	0.00383
5	5	0.04214	0.04135	0.03936	...	0.00254	0.00249
10	5	0.02441	0.02401	0.02290	...	0.00235	0.00237
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
35	5	0.05353	0.05276	0.05098	...	0.01251	0.01404

40	5	0.06067	0.06001	0.05831	...	0.01874	0.02101
45	5	0.06847	0.06796	0.06643	...	0.02934	0.03325
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	5	0.58913	0.58966	0.58811	...	0.52627	0.56758
85	5	0.71950	0.72027	0.71936	...	0.70098	0.74251
90	5	0.82579	0.82686	0.82645	...	0.81899	0.84512

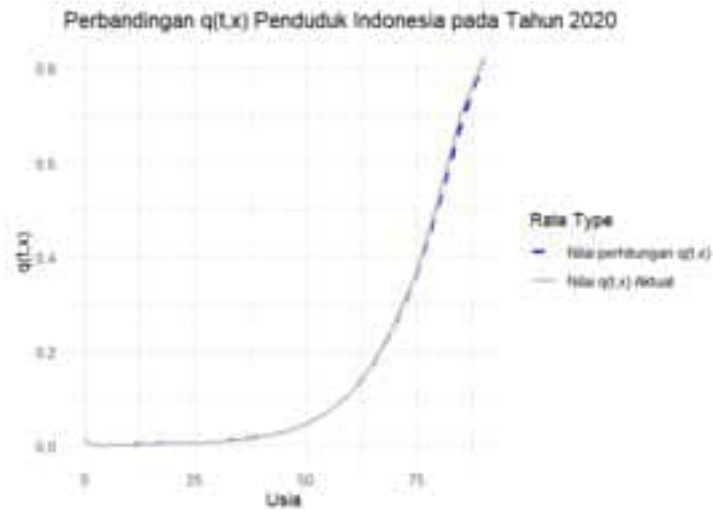
Selanjutnya disini akan dihitung nilai dari $nq_{x,t}$ menggunakan nilai dari $n\hat{m}_{x,t}$. Nilai $n\hat{m}_{x,t}$ yang akan digunakan disini adalah nilai $n\hat{m}_{x,t}$ pada skenario 2 dengan pertimbangan memiliki nilai MAPE yang lebih baik dibandingkan dengan nilai $n\hat{m}_{x,t}$ pada skenario 1. Setelah dilakukan perhitungan nilai $nq_{x,t}$ menggunakan persamaan diatas sebagian hasil perhitungan yang diperoleh disajikan oleh Tabel 4.8 (Hasil lengkap terdapat pada lampiran)

Tabel 4.9. Nilai $nq_{x,t}$ Penduduk Indonesia Berdasarkan Nilai $n\hat{m}_{t,x}$ pada Skenario 2

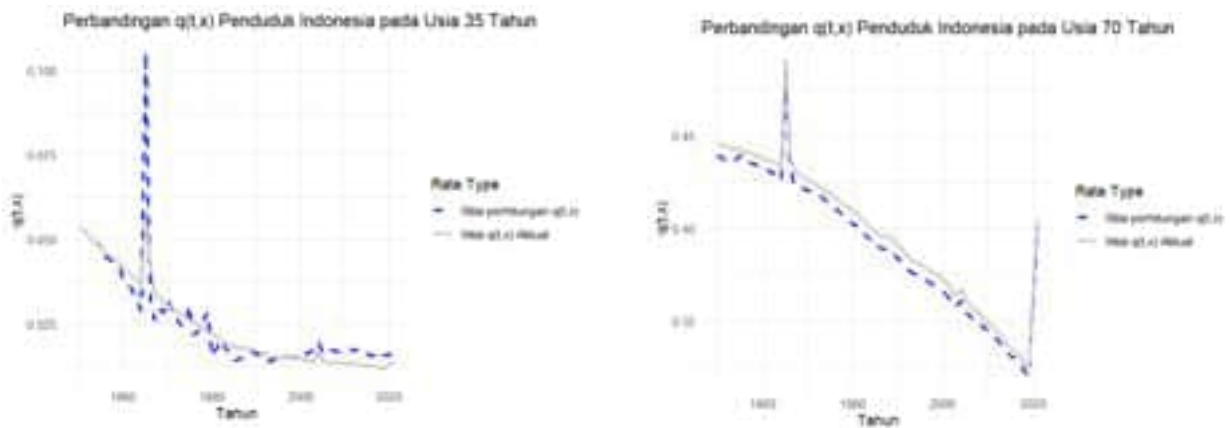
x	n	$n\hat{q}_{x,t}$ 1950	$n\hat{q}_{x,t}$ 1951	$n\hat{q}_{x,t}$ 1952	...	$n\hat{q}_{x,t}$ 2020	$n\hat{q}_{x,t}$ 2021
0	1	0.195692	0.193567	0.188079	...	0.019311	0.018695
1	4	0.145118	0.142531	0.135261	...	0.004116	0.00383
5	5	0.042895	0.042277	0.039778	...	0.002542	0.002494

10	5	0.023804	0.023381	0.022708	...	0.002386	0.002388
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
35	5	0.053496	0.052731	0.050949	...	0.01544	0.016851
40	5	0.060991	0.060009	0.058789	...	0.018731	0.020992
45	5	0.068789	0.067962	0.066922	...	0.029198	0.033105
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	5	0.574984	0.575286	0.57336	...	0.51352	0.55144
85	5	0.706485	0.706991	0.705644	...	0.677692	0.71234
90	5	0.809463	0.810368	0.809931	...	0.816837	0.840769

Berikut diberikan beberapa visualisasi perbandingan grafik antara tingkat mortalitas aktual ${}_nq_{x,t}$ penduduk Indonesia dan tingkat mortalitas estimasi ${}_n\hat{q}_{x,t}$ penduduk Indonesia pada skenario 2, pada usia 30 dan 75 untuk setiap tahun, dan untuk setiap usia pada tahun 2020 yang masing masing disajikan pada gambar



Gambar 4.19. Nilai ${}_nq_{x,t}$ Aktual dan Nilai ${}_n\hat{q}_{x,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia pada Tahun 2020



Gambar 4.20. Nilai ${}_nq_{x,t}$ Aktual dan Nilai ${}_n\hat{q}_{x,t}$ Estimasi Penduduk Indonesia Pada Usia 35 dan 70 Tahun pada Skenario 2

Setelah didapatkan nilai ${}_n\hat{q}_{x,t}$ estimasi penduduk Indonesia pada skenario 2, langkah berikutnya adalah melakukan evaluasi keakurasian hasil estimasi dengan melakukan perhitungan MAPE dengan menggunakan persamaan berikut

$$\text{MAPE} = \frac{1}{72} \sum_{t=1}^{72} \left| \frac{{}_nq_{x,t} - {}_n\hat{q}_{x,t}}{{}_nq_{x,t}} \right| \times 100\%$$

Setelah dilakukan perhitungan nilai MAPE menggunakan persamaan diatas, hasil yang diperoleh disajikan pada Tabel 4.9.

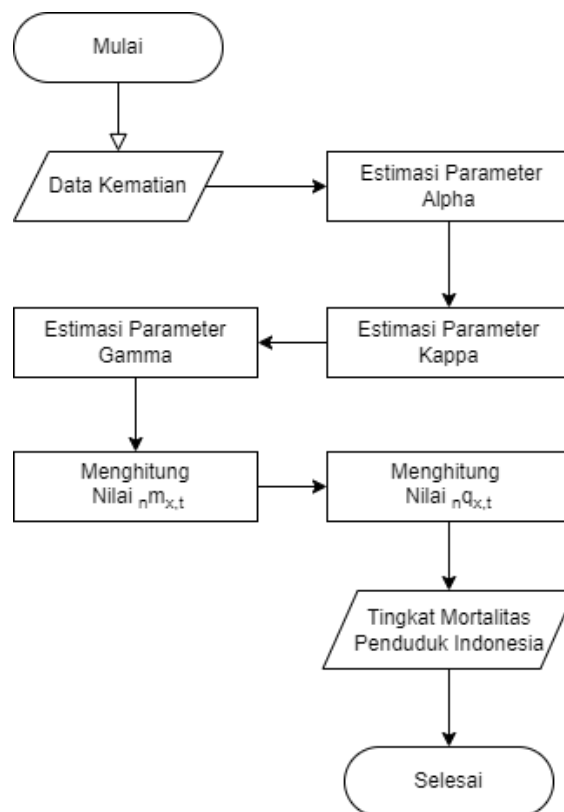
Tabel 4.10. MAPE dari Hasil Estimasi nilai ${}_nq_{x,t}$ pada Skenario 2 untuk Penduduk Indonesia

Usia	MAPE	Usia	MAPE
0	1.7%	45	0.5%
1	1.9%	50	0.5%
5	1.0%	55	0.4%
10	1.8%	60	0.5%
15	1.1%	65	0.8%
20	15.4%	70	1.2%
25	11.8%	75	1.5%
30	11.8%	80	2.0%
35	14.3%	85	1.9%
40	0.3%	90	1.7%

Berdasarkan Tabel 4.9 diperoleh informasi bahwa hampir setiap usia sudah memiliki nilai MAPE cukup rendah kecuali untuk beberapa usia masih memiliki nilai yang tinggi dimana nilai MAPE lebih dari 10% yaitu di usia 20, 25, 30, 35. Secara umum hasil MAPE untuk nilai dari tingkat mortalitas sudah memasuki kategori yang sangat baik dimana nilai MAPE sudah berada dibawah 10%. Selanjutnya untuk rentang usia 40 sampai 90 tahun

secara keseluruhan sudah sangat baik dengan mencapai nilai MAPE $\pm 1\%$, selain itu nilai MAPE terendah dicapai pada usia 40 tahun sebesar 0.3% yang memberikan informasi bahwa nilai ${}_n m_{x,t}$ yang diberikan oleh model CBDX pada skenario 2 sudah sangat baik untuk digunakan dalam menghitung tingkat mortalitas penduduk Indonesia. Hasil nilai MAPE pada untuk tingkat mortalitas ini juga sejalan dengan metode CBDX yang mengasumsikan model ini lebih baik dalam mengestimasi tingkat mortalitas pada rentang usia dewasa (Dowd et al., 2020).

Secara umum alur pengaplikasian data untuk memodelkan tingkat mortalitas penduduk Indonesia menggunakan model CBDX diberikan oleh gambar berikut.



Gambar 4.21. Alur Pengaplikasian Data untuk Memodelkan Tingkat Kematian

4.5. Peramalan Tingkat Mortalitas Indonesia

Setelah didapatkan nilai estimasi dari masing-masing parameter model CBDX 3 dan nilai dari tingkat kematian ${}_n m_{x,t}$ dan tingkat mortalitas ${}_n q_{x,t}$ penduduk Indonesia pada usia dewasa, akan dilakukan peramalan dari nilai-nilai parameter CBDX 3 yang dependen terhadap waktu $\widehat{\kappa}_1(t)$, $\widehat{\kappa}_2(t)$, $\widehat{\kappa}_3(t)$ pada usia dewasa. Setelah dilakukan peramalan

parameter model CBDX yang bergantung terhadap waktu kemudian akan dilakukan peramalan nilai dari tingkat kematian ${}_n m_{x,t}$ dan tingkat mortalitas ${}_n q_{x,t}$ penduduk Indonesia pada usia dewasa.

4.5.1. Peramalan nilai $\widehat{\kappa}_i(t)$

Metode *Random Walk with Drift* dipilih untuk meramalkan parameter $\widehat{\kappa}_i(t)$ pada model CBDX3 karena metode ini dapat menangkap pola tren linier yang sederhana namun fluktuatif dari waktu ke waktu, seperti yang ditunjukkan oleh data historis $\widehat{\kappa}_i(t)$. Drift dalam model ini berfungsi untuk mencerminkan kecenderungan peningkatan atau penurunan jangka panjang, sehingga hasil peramalan dapat lebih akurat dalam menggambarkan perubahan indeks mortalitas pada populasi dewasa.

Langkah berikutnya setelah mendapatkan estimasi nilai parameter-parameter pada model CBDX 3 adalah meramalkan nilai parameter $\widehat{\kappa}_1(t)$, $\widehat{\kappa}_2(t)$, $\widehat{\kappa}_3(t)$ pada usia dewasa. Nilai $\widehat{\kappa}_i(t)$ yang diperoleh pada subbab 4.2 mulai dari tahun 1955-2021 akan digunakan untuk pembentukan model *Random Walk with drift* untuk nilai $\widehat{\kappa}_i(t)$ pada tahun 2022. Setelah dilakukan proses peramalan parameter $\widehat{\kappa}_i(t)$ untuk tahun 2022 didapatkan nilai parameter $\widehat{\kappa}_i(t)$ untuk $i = 1, 2, 3$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa}_1(t+n) &= \kappa_1(t) + 0.0047n \\ \widehat{\kappa}_2(t+n) &= \kappa_2(t) + 2 \times 10^{-4}n \\ \widehat{\kappa}_3(t+n) &= \kappa_3(t) + 1 \times 10^{-4}n\end{aligned}$$

dimana $\widehat{\kappa}_i(t+n)$ adalah nilai indeks mortalitas pada periode $t+n$. Model tersebut kemudian digunakan untuk meramalkan nilai $\widehat{\kappa}_i(t)$ pada periode setelahnya. Nilai hasil peramalan $\widehat{\kappa}_i(t)$ pada tahun 2022 dapat dilihat pada Tabel 4.11

Tabel 4.11. Hasil Forecast untuk $\widehat{\kappa}_i(2022)$

	$\widehat{\kappa}_i(t)$ Estimated
$\widehat{\kappa}_1(2022)$	0.02280424

$\widehat{\kappa}_2(2022)$	0.005569592
$\widehat{\kappa}_3(2022)$	-0.0002100718

4.5.2. Peramalan nilai ${}_n m_{x,t}$ dan ${}_n q_{x,t}$ Penduduk Indonesia

Setelah mendapatkan nilai peramalan dari $\widehat{\kappa}_i(t)$ untuk $i = 1, 2, 3$ akan dilakukan perhitungan nilai ${}_n m_{x,t}$ dan ${}_n q_{x,t}$ penduduk Indonesia pada usia dewasa menggunakan model CBDX. Perhitungan ulang terhadap nilai ${}_n \widehat{m}_{x,t}$ selanjutnya disebut sebagai nilai peramalan ${}_n \widehat{m}_{x,t}$. Nilai ${}_n \widehat{m}_{x,t}$ peramalan pada tahun 2022 dapat dilihat pada Tabel 4.12

Tabel 4.12. Nilai dari ${}_n \widehat{m}_{x,t}$ Forecasted tahun 2022

Usia	${}_n \widehat{m}_{x,t}$ Forecasted
40	0.004192
45	0.006526
50	0.010345
55	0.016276
60	0.026519
65	0.042153

70	0.067643
75	0.105866
80	0.163784
85	0.244742
90	0.337454

Selanjutnya setelah didapatkan nilai dari ${}_n\hat{m}_{x,t}$ Forecasted tahun 2022, akan dilakukan perhitungan terhadap tingkat mortalitas ${}_nq_{x,t}$ usia dewasa penduduk Indonesia pada tahun 2022. Perhitungan untuk ${}_nq_{x,t}$ pada tahun 2022 selanjutnya disebut sebagai ${}_n\hat{q}_{x,t}$, nilai ${}_n\hat{q}_{x,t}$ peramalan pada tahun 2022 dapat dilihat pada Tabel 4.13

Tabel 4.13. Nilai dari ${}_n\hat{q}_{x,t}$ Forecasted tahun 2022

Usia	${}_n\hat{q}_{x,t}$ Forecasted
40	0.020742
45	0.032103
50	0.05041
55	0.078157

60	0.12418
65	0.190036
70	0.286958
75	0.411001
80	0.559092
85	0.705863
90	0.814976

Berdasarkan Tabel 4.12 & 4.13 risiko kematian penduduk Indonesia di tahun 2022 cenderung mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya usia, tren ini sesuai dengan tren risiko kematian di tahun-tahun sebelumnya.

BAB 5

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya terkait pemodelan tingkat mortalitas penduduk Indonesia menggunakan model CBDX. Tahap pertama dalam memodelkan tingkat mortalitas penduduk Indonesia menggunakan model CBDX adalah melakukan pengestimasian parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$ pada model CBDX. Pengestimasian parameter dilakukan menggunakan metode estimasi *Sequential Maximum Likelihood* dimana parameter-parameter pada model CBDX ini diestimasi secara berurutan satu persatu mulai dari parameter $\alpha(x)$, $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dan $\gamma(c)$. Untuk proses estimasi parameter $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ dilakukan metode numerik berupa metode quasi-newton berupa metode BFGS untuk mengestimasi parameter ini.

Setelah diperoleh nilai dari estimasi parameter yang digunakan untuk model CBDX pada masing masing skenario kemudian dihitung nilai dari *Central Death Rate* atau ${}_n m_{x,t}$ yang kemudian akan dievaluasi dengan nilai aktualnya dengan menggunakan metrik evaluasi berupa MAPE. Didapatkan hasil berupa nilai dari perhitungan ${}_n m_{x,t}$ pada skenario 2 lebih baik dibandingkan dengan skenario 1, dengan mayoritas nilai MAPE berada pada nilai dibawah 10%. Lebih lanjut lagi untuk usia dewasa dimulai dari usia 40 sampai usia 90 tahun memiliki nilai MAPE $\pm 1\%$, yang sesuai dengan metode CBDX yang mengasumsikan model ini lebih baik dalam mengestimasi nilai ${}_n m_{x,t}$ pada rentang usia dewasa. Selanjutnya dilakukan perbandingan MAPE untuk nilai dari perhitungan ${}_n m_{x,t}$ untuk masing-masing model CBDX 1, CBDX 2, dan CBDX 3. Setelah dilakukan perbandingan nilai MAPE untuk masing-masing model CBDX didapatkan bahwasannya model CBDX 3 merupakan model terbaik dengan nilai MAPE terendah sebesar $\pm 1.5\%$ untuk usia dewasa.

Tahapan selanjutnya adalah melakukan perhitungan untuk nilai dari tingkat mortalitas atau ${}_n q_{x,t}$ yang juga merupakan tahapan terakhir adalah melakukan perhitungan untuk nilai dari tingkat mortalitas atau ${}_n q_{x,t}$ dengan nilai dari ${}_n m_{x,t}$ yang sudah didapatkan pada skenario 2. Hasil perhitungan terhadap ${}_n q_{x,t}$ ini juga dievaluasi dengan nilai

aktualnya dengan menggunakan metrik evaluasi berupa MAPE dan memiliki mayoritas nilai MAPE dibawah 10% yang menunjukkan bahwa pemodelan tingkat mortalitas atau ${}_nq_{x,t}$ untuk penduduk Indonesia dengan menggunakan nilai ${}_nm_{x,t}$ yang diperoleh melalui model CBDX memiliki performa yang sangat baik.

5.2. Saran

Pada penelitian ini parameter κ telah diramalkan menggunakan metode *Random Walk with Drift*. Untuk penelitian berikutnya dapat menggunakan model runtun waktu yang lebih komprehensif dengan harapan dapat meningkatkan akurasi proyeksi tingkat mortalitas.

DAFTAR PUSTAKA

- Arneric, J., & Rozga, A. (2009). *Numerical Optimization within Vector of Parameters Estimation in Volatility Models*. 37.
- Bowers, N. , H. U. Gerber, J. Hickman, D. Jones, & and C. Nesbitt. (1997). *Actuarial Mathematics: Vol. (2th edition)* (Issue Schaumburg: Society of Actuaries.).
- Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., & Balevich, I. (2009). A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data From England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, 13(1), 1–35.
<https://doi.org/10.1080/10920277.2009.10597538>
- Cunningham, R. J., Herzog, T. N., & London, R. L. (2006). *Models for quantifying risk*. ACTEX Publications.
- Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2009). Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. In *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511800146>
- Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2019). Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks. In *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. <https://doi.org/10.1017/9781108784184>
- Dowd, K., Cairns, A. J. G., & Blake, D. (2020). CBDX: A workhorse mortality model from the Cairns-Blake-Dowd family. *Annals of Actuarial Science*, 14(2), 445–460. <https://doi.org/10.1017/S1748499520000159>
- Harris, T. F., Yelowitz, A., & Courtemanche, C. (2021). Did COVID-19 change life insurance offerings? *Journal of Risk and Insurance*, 88(4).
<https://doi.org/10.1111/jori.12344>
- Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics: Vol. (8th ed.)*.
- Hunt, A., & Blake, D. (2014a). A General Procedure for Constructing Mortality Models. *North American Actuarial Journal*, 18(1), 116–138.
<https://doi.org/10.1080/10920277.2013.852963>
- Hunt, A., & Blake, D. (2014b). A General Procedure for Constructing Mortality Models. *North American Actuarial Journal*, 18(1), 116–138.
<https://doi.org/10.1080/10920277.2013.852963>

- Hunt, A., & Blake, D. P. (2020). On the Structure and Classification of Mortality Models. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3552208>
- Introduction to Mathematical Statistics*. (2004). <http://www.hep.edu.cn>
- Jorge Nocedal, & Stephen Wright. (2006). Numerical Optimization (Jorge Nocedal, Stephen Wright). In *Springer*.
- Kanchan, T., Kumar, N., & Unnikrishnan, B. (2016). Mortality: Statistics. In J. Payne-James & R. W. Byard (Eds.), *Encyclopedia of Forensic and Legal Medicine (Second Edition)* (Second Edition, pp. 572–577). Elsevier. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/B978-0-12-800034-2.00297-4>
- Kwon, H. S., & Nguyen, V. H. (2019). Analysis of cause-of-death mortality and actuarial implications. *Communications for Statistical Applications and Methods*, 26(6), 557–573. <https://doi.org/10.29220/CSAM.2019.26.6.557>
- Lewis. (1982). Industrial and Business Forecasting Methods. In *Psicothema*.
- London, D. (1988). *Survival models and their estimation*. ACTEX Publications.
- Mantra, & Bagus, I. (2009). *Demografi Umum*. Pustaka Pelajar Offset.
- Myung, I. J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of Mathematical Psychology*, 47(1). [https://doi.org/10.1016/S0022-2496\(02\)00028-7](https://doi.org/10.1016/S0022-2496(02)00028-7)
- Rothman, H. K. (1992). Population Matters: People, Resources, Environment, and Immigration . By Julian L. Simon . *Environmental History Review*, 16(4). <https://doi.org/10.2307/3984951>
- Syuhada, K., & Hakim, A. (2021). Stochastic modeling of mortality rates and Mortality-at-Risk forecast by taking conditional heteroscedasticity effect into account. *Heliyon*, 7(10). <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e08083>
- Tsai, C. C. L., & Kim, S. (2022). Model mortality rates using property and casualty insurance reserving methods. *Insurance: Mathematics and Economics*, 106, 326–340. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2022.07.007>
- Véron, J., Preston, S., Heuveline, P., & Guillot, M. (2002). Demography, Measuring and Modeling Population Processes. *Population (French Edition)*, 57, 591. <https://doi.org/10.2307/1535065>
- Wolthuis, H., & Willemse, W. J. (2004). Insurance Industry, Mortality Tables in. In *Encyclopedia of Social Measurement, Three-Volume Set* (Vol. 2). <https://doi.org/10.1016/B0-12-369398-5/00253-X>

World Health Organisation. (2013). Consolidated ARV guidelines 2013. *Geneva: World Health Organization*, 14(7), 269.
<http://www.who.int/hiv/pub/guidelines/arv2013/>

LAMPIRAN

Lampiran 1. Kode Pemrograman

```
#Skenario 1
data_raw_all <- read_excel("C:/Users/Lenovo/OneDrive - UNIVERSITAS
INDONESIA/Documents/Skripsi/Data skripsi group umur.xlsx", sheet = 1)

data_all <- data.frame (
  ages = data_raw_all$`Age (x)`,
  years = data_raw_all$Year,
  Dxt = as.numeric(data_raw_all$`Number of deaths d(x,n)`),
  Ext = as.numeric(data_raw_all$`Number of person-years lived L(x,n)`),
  actual_mtx = as.numeric(data_raw_all$`Central death rate m(x,n)`))

mean_variance_per_year <- data_all %>%
  group_by(years)%>%
  summarise(mean_deaths = mean(Dxt, na.rm = TRUE),
            variance_deaths = var(Dxt, na.rm = TRUE))

data_all <- data_all %>%
  filter(ages <= 90)

alpha_estimates_all <- data_all %>%
  group_by(ages) %>%
  summarise(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext)))

ggplot(alpha_estimates_all, aes(x = ages, y = Alpha)) +
  geom_line() + # Connect points with lines
  geom_point() + # Add points to indicate actual Alpha values
  labs(title = expression(hat(alpha) * " untuk Setiap Usia"), # Use hat(alpha) if you need
        to denote an estimated alpha
        x = "Age",
        y = "Nilai Estimasi Alpha") + # Optionally use alpha in the y-axis label too
  theme_minimal() # Use a minimal theme for aesthetics

#Estimating Alpha
data_all <- data_all %>%
  group_by(ages) %>%
  mutate(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext))) %>%
  ungroup()

#Prepare for Kappa
mean_ages_all <- mean(data_all$ages)
var_ages_all <- var(data_all$ages)

data_all <- data_all %>%
  mutate(
```

```

    x_scaled = ages - mean_ages_all,
    x_scaled2 = (ages - mean_ages_all)^2 - var_ages_all
  )

logLikFun <- function(params, Alpha, x_scaled, x_scaled2, Ext, Dxt, years, ny) {
  kappa1 <- params[1:ny] # kappa1 for each year
  kappa2 <- params[(ny+1):(2*ny)] # kappa2 for each year
  kappa3 <- params[(2*ny+1):(3*ny)] # kappa3 for each year

  model_rates <- Alpha + kappa1[years - min(years) + 1] +
    x_scaled * kappa2[years - min(years) + 1] +
    x_scaled2 * kappa3[years - min(years) + 1]

  expected_deaths <- Ext * exp(model_rates)
  logLik <- -sum(Dxt * model_rates - expected_deaths)
  return(logLik)
}

ny <- length(unique(data_all$years))

# Initial parameter values
initial_params <- c(rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny))

# Call optim using the logLikFun
opt_result_all <- optim(
  par = initial_params,
  fn = logLikFun,
  method = "BFGS",
  Alpha = data_all$Alpha,
  x_scaled = data_all$x_scaled,
  x_scaled2 = data_all$x_scaled2,
  Ext = data_all$Ext,
  Dxt = data_all$Dxt,
  years = data_all$years,
  ny = ny
)

# Extract optimized parameters
optimized_kappas_all <- matrix(opt_result_all$par, nrow = 3, byrow = TRUE)
colnames(optimized_kappas_all) <- min(data_all$years):max(data_all$years)
rownames(optimized_kappas_all) <- c("kappa1", "kappa2", "kappa3")
print(optimized_kappas_all)

years <- min(data_all$years):max(data_all$years)

# Create data frames for each kappa parameter
kappa1_data_all <- data.frame(Year = years, Kappa = optimized_kappas_all[1, ])
kappa2_data_all <- data.frame(Year = years, Kappa = optimized_kappas_all[2, ])

```

```

kappa3_data_all <- data.frame(Year = years, Kappa = optimized_kappas_all[3, ])

# Plotting kappa1
p1_all <- ggplot(kappa1_data_all, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "red") +
  labs(title = "Estimated Kappa1 Parameters Over Time",
        x = "Year",
        y = "Kappa1 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa2
p2_all <- ggplot(kappa2_data_all, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "blue") +
  labs(title = "Estimated Kappa2 Parameters Over Time",
        x = "Year",
        y = "Kappa2 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa3
p3_all <- ggplot(kappa3_data_all, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "green") +
  labs(title = "Estimated Kappa3 Parameters Over Time",
        x = "Year",
        y = "Kappa3 Value") +
  theme_minimal()

# Display the plots
print(p1_all)
print(p2_all)
print(p3_all)

data_all <- data_all %>%
  mutate(
    kappa1 = optimized_kappas_all[1, years - min(years) + 1],
    kappa2 = optimized_kappas_all[2, years - min(years) + 1],
    kappa3 = optimized_kappas_all[3, years - min(years) + 1]
  )

#Preparing for cohort calculations
data_all$cohort <- data_all$years - data_all$ages

#Estimating Gamma
gamma_data_all <- data_all %>%
  group_by(cohort) %>%
  summarize(
    sum_Dxt = sum(Dxt),
    sum_Ext_alpha_kappa = sum(Ext * exp(Alpha + kappa1 + x_scaled * kappa2 +
x_scaled2 * kappa3)),

```

```

    .groups = 'drop' # Drop grouping structure after summarization
  ) %>%
  mutate(gamma = log(sum_Dxt / sum_Ext_alpha_kappa))

ggplot(gamma_data_all, aes(x = cohort, y = gamma)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_point(color = "red", size = 2) +
  labs(title = "Estimated Gamma (Cohort Effects) Over Cohorts",
       x = "Cohort (Year of Birth)",
       y = "Gamma Value") +
  theme_minimal() +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))

data_all <- data_all %>%
  left_join(gamma_data_all %>% select(cohort, gamma), by = "cohort")

data_all <- data_all %>%
  mutate(
    m_tx = exp(Alpha +
               kappa1 +
               x_scaled * kappa2 +
               x_scaled2 * kappa3 +
               gamma)
  )

#Skenario 2

#Umur 0 & 1
data_raw_group1 <- read_excel("C:/Users/Lenovo/OneDrive - UNIVERSITAS
INDONESIA/Documents/Skripsi/Data skripsi group umur.xlsx", sheet = 2)

data_group1 <- data.frame (
  ages = data_raw_group1$`Age (x)`,
  years = data_raw_group1$Year,
  Dxt = as.numeric(data_raw_group1$`Number of deaths d(x,n)`),
  Ext = as.numeric(data_raw_group1$`Number of person-years lived L(x,n)`),
  actual_mtx = as.numeric(data_raw_group1$`Central death rate m(x,n)`))

alpha_estimates <- data_group1 %>%
  group_by(ages) %>%
  summarise(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext)))

#Estimating Alpha
data_group1 <- data_group1 %>%
  group_by(ages) %>%
  mutate(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext))) %>%
  ungroup()

```

```

#Prepare for Kappa
mean_ages_group1 <- mean(data_group1$ages)
var_ages_group1 <- var(data_group1$ages)

data_group1 <- data_group1 %>%
  mutate(
    x_scaled = ages - mean_ages_group1,
    x_scaled2 = (ages - mean_ages_group1)^2 - var_ages_group1
  )

logLikFun <- function(params, Alpha, x_scaled, x_scaled2, Ext, Dxt, years, ny) {
  kappa1 <- params[1:ny] # kappa1 for each year
  kappa2 <- params[(ny+1):(2*ny)] # kappa2 for each year
  kappa3 <- params[(2*ny+1):(3*ny)] # kappa3 for each year

  model_rates <- Alpha + kappa1[years - min(years) + 1] +
    x_scaled * kappa2[years - min(years) + 1] +
    x_scaled2 * kappa3[years - min(years) + 1]

  expected_deaths <- Ext * exp(model_rates)
  logLik <- -sum(Dxt * model_rates - expected_deaths)
  return(logLik)
}

ny <- length(unique(data_group1$years))

# Initial parameter values
initial_params <- c(rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny))

# Call optim using the logLikFun
opt_result_group1 <- optim(
  par = initial_params,
  fn = logLikFun,
  method = "BFGS",
  Alpha = data_group1$Alpha,
  x_scaled = data_group1$x_scaled,
  x_scaled2 = data_group1$x_scaled2,
  Ext = data_group1$Ext,
  Dxt = data_group1$Dxt,
  years = data_group1$years,
  ny = ny
)

# Extract optimized parameters
optimized_kappas_group1 <- matrix(opt_result_group1$par, nrow = 3, byrow = TRUE)
colnames(optimized_kappas_group1) <-
min(data_group1$years):max(data_group1$years)
rownames(optimized_kappas_group1) <- c("kappa1", "kappa2", "kappa3")

```

```

print(optimized_kappas_group1)

years <- min(data_group1$years):max(data_group1$years)

# Create data frames for each kappa parameter
kappa1_data_group1 <- data.frame(Year = years, Kappa =
optimized_kappas_group1[1, ])
kappa2_data_group1 <- data.frame(Year = years, Kappa =
optimized_kappas_group1[2, ])
kappa3_data_group1 <- data.frame(Year = years, Kappa =
optimized_kappas_group1[3, ])

# Plotting kappa1
p1_group1 <- ggplot(kappa1_data_group1, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "red") +
  labs(title = "Estimated Kappa1 Parameters Over Time",
    x = "Year",
    y = "Kappa1 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa2
p2_group1 <- ggplot(kappa2_data_group1, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "blue") +
  labs(title = "Estimated Kappa2 Parameters Over Time",
    x = "Year",
    y = "Kappa2 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa3
p3_group1 <- ggplot(kappa3_data_group1, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "green") +
  labs(title = "Estimated Kappa3 Parameters Over Time",
    x = "Year",
    y = "Kappa3 Value") +
  theme_minimal()

# Display the plots
print(p1_group1)
print(p2_group1)
print(p3_group1)

data_group1 <- data_group1 %>%
  mutate(
    kappa1 = optimized_kappas_group1[1, years - min(years) + 1],
    kappa2 = optimized_kappas_group1[2, years - min(years) + 1],
    kappa3 = optimized_kappas_group1[3, years - min(years) + 1]
  )

```

```

#Preparing for cohort calculations
data_group1$cohort <- data_group1$years - data_group1$ages

#Estimating Gamma
gamma_data_group1 <- data_group1 %>%
  group_by(cohort) %>%
  summarize(
    sum_Dxt = sum(Dxt),
    sum_Ext_alpha_kappa = sum(Ext * exp(Alpha + kappa1 + x_scaled * kappa2 +
x_scaled2 * kappa3)),
    .groups = 'drop' # Drop grouping structure after summarization
  ) %>%
  mutate(gamma = log(sum_Dxt / sum_Ext_alpha_kappa))

ggplot(gamma_data_group1, aes(x = cohort, y = gamma)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_point(color = "red", size = 2) +
  labs(title = "Estimated Gamma (Cohort Effects) Over Cohorts",
    x = "Cohort (Year of Birth)",
    y = "Gamma Value") +
  theme_minimal() +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))

data_group1 <- data_group1 %>%
  left_join(gamma_data_group1 %>% select(cohort, gamma), by = "cohort")

data_group1 <- data_group1 %>%
  mutate(
    m_tx = exp(Alpha +
      kappa1 +
      x_scaled * kappa2 +
      x_scaled2 * kappa3 +
      gamma)
  )

#Umur 5,10, & 15

data_raw_group2 <- read_excel("C:/Users/Lenovo/OneDrive - UNIVERSITAS
INDONESIA/Documents/Skripsi/Data skripsi group umur.xlsx", sheet = 3)

data_group2 <- data.frame (
  ages = data_raw_group2$`Age (x)`,
  years = data_raw_group2$Year,
  Dxt = as.numeric(data_raw_group2$`Number of deaths d(x,n)`),
  Ext = as.numeric(data_raw_group2$`Number of person-years lived L(x,n)`),
  actual_mtx = as.numeric(data_raw_group2$`Central death rate m(x,n)`)
)

```

```

alpha_estimates_group2 <- data_group2 %>%
  group_by(ages) %>%
  summarise(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext)))

#Estimating Alpha
data_group2 <- data_group2 %>%
  group_by(ages) %>%
  mutate(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext))) %>%
  ungroup()

#Prepare for Kappa
mean_ages_group2 <- mean(data_group2$ages)
var_ages_group2 <- var(data_group2$ages)

data_group2 <- data_group2 %>%
  mutate(
    x_scaled = ages - mean_ages_group2,
    x_scaled2 = (ages - mean_ages_group2)^2 - var_ages_group2
  )

logLikFun <- function(params, Alpha, x_scaled, x_scaled2, Ext, Dxt, years, ny) {
  kappa1 <- params[1:ny] # kappa1 for each year
  kappa2 <- params[(ny+1):(2*ny)] # kappa2 for each year
  kappa3 <- params[(2*ny+1):(3*ny)] # kappa3 for each year

  model_rates <- Alpha + kappa1[years - min(years) + 1] +
    x_scaled * kappa2[years - min(years) + 1] +
    x_scaled2 * kappa3[years - min(years) + 1]

  expected_deaths <- Ext * exp(model_rates)
  logLik <- -sum(Dxt * model_rates - expected_deaths)
  return(logLik)
}

ny <- length(unique(data_group2$years))

# Initial parameter values
initial_params <- c(rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny))

# Call optim using the logLikFun
opt_result_group2 <- optim(
  par = initial_params,
  fn = logLikFun,
  method = "BFGS",
  Alpha = data_group2$Alpha,
  x_scaled = data_group2$x_scaled,
  x_scaled2 = data_group2$x_scaled2,
  Ext = data_group2$Ext,

```

```

Dxt = data_group2$Dxt,
years = data_group2$years,
ny = ny
)

# Extract optimized parameters
optimized_kappas_group2 <- matrix(opt_result_group2$par, nrow = 3, byrow = TRUE)
colnames(optimized_kappas_group2) <-
min(data_group2$years):max(data_group2$years)
rownames(optimized_kappas_group2) <- c("kappa1", "kappa2", "kappa3")
print(optimized_kappas_group2)

years <- min(data_group2$years):max(data_group2$years)

# Create data frames for each kappa parameter
kappa1_data_group2 <- data.frame(Year = years, Kappa =
optimized_kappas_group2[1, ])
kappa2_data_group2 <- data.frame(Year = years, Kappa =
optimized_kappas_group2[2, ])
kappa3_data_group2 <- data.frame(Year = years, Kappa =
optimized_kappas_group2[3, ])

# Plotting kappa1
p1_group2 <- ggplot(kappa1_data_group2, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "red") +
  labs(title = "Estimated Kappa1 Parameters Over Time",
       x = "Year",
       y = "Kappa1 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa2
p2_group2 <- ggplot(kappa2_data_group2, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "blue") +
  labs(title = "Estimated Kappa2 Parameters Over Time",
       x = "Year",
       y = "Kappa2 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa3
p3_group2 <- ggplot(kappa3_data_group2, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "green") +
  labs(title = "Estimated Kappa3 Parameters Over Time",
       x = "Year",
       y = "Kappa3 Value") +
  theme_minimal()

# Display the plots
print(p1_group2)

```

```

print(p2_group2)
print(p3_group2)

data_group2 <- data_group2 %>%
  mutate(
    kappa1 = optimized_kappas_group2[1, years - min(years) + 1],
    kappa2 = optimized_kappas_group2[2, years - min(years) + 1],
    kappa3 = optimized_kappas_group2[3, years - min(years) + 1]
  )

#Preparing for cohort calculations
data_group2$cohort <- data_group2$years - data_group2$ages

#Estimating Gamma
gamma_data_group2 <- data_group2 %>%
  group_by(cohort) %>%
  summarize(
    sum_Dxt = sum(Dxt),
    sum_Ext_alpha_kappa = sum(Ext * exp(Alpha + kappa1 + x_scaled * kappa2 +
x_scaled2 * kappa3)),
    .groups = 'drop' # Drop grouping structure after summarization
  ) %>%
  mutate(gamma = log(sum_Dxt / sum_Ext_alpha_kappa))

ggplot(gamma_data_group2, aes(x = cohort, y = gamma)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_point(color = "red", size = 2) +
  labs(title = "Estimated Gamma (Cohort Effects) Over Cohorts",
    x = "Cohort (Year of Birth)",
    y = "Gamma Value") +
  theme_minimal() +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))

data_group2 <- data_group2 %>%
  left_join(gamma_data_group2 %>% select(cohort, gamma), by = "cohort")

data_group2 <- data_group2 %>%
  mutate(
    m_tx = exp(Alpha +
      kappa1 +
      x_scaled * kappa2 +
      x_scaled2 * kappa3 +
      gamma)
  )

#Umur 20, 25, 30, & 35
data_raw_group3 <- read_excel("C:/Users/Lenovo/OneDrive - UNIVERSITAS
INDONESIA/Documents/Skripsi/Data skripsi group umur.xlsx", sheet = 4)

```

```

data_group3 <- data.frame (
  ages = data_raw_group3$`Age (x)`,
  years = data_raw_group3$Year,
  Dxt = as.numeric(data_raw_group3$`Number of deaths d(x,n)`),
  Ext = as.numeric(data_raw_group3$`Number of person-years lived L(x,n)`),
  actual_mtx = as.numeric(data_raw_group3$`Central death rate m(x,n)`))

alpha_estimates_group3 <- data_group3 %>%
  group_by(ages) %>%
  summarise(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext)))

#Estimating Alpha
data_group3 <- data_group3 %>%
  group_by(ages) %>%
  mutate(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext))) %>%
  ungroup()

#Prepare for Kappa
mean_ages_group3 <- mean(data_group3$ages)
var_ages_group3 <- var(data_group3$ages)

data_group3 <- data_group3 %>%
  mutate(
    x_scaled = ages - mean_ages_group3,
    x_scaled2 = (ages - mean_ages_group3)^2 - var_ages_group3
  )

logLikFun <- function(params, Alpha, x_scaled, x_scaled2, Ext, Dxt, years, ny) {
  kappa1 <- params[1:ny] # kappa1 for each year
  kappa2 <- params[(ny+1):(2*ny)] # kappa2 for each year
  kappa3 <- params[(2*ny+1):(3*ny)] # kappa3 for each year

  model_rates <- Alpha + kappa1[years - min(years) + 1] +
    x_scaled * kappa2[years - min(years) + 1] +
    x_scaled2 * kappa3[years - min(years) + 1]

  expected_deaths <- Ext * exp(model_rates)
  logLik <- -sum(Dxt * model_rates - expected_deaths)
  return(logLik)
}

ny <- length(unique(data_group3$years))

# Initial parameter values
initial_params <- c(rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny))

# Call optim using the logLikFun

```

```

opt_result_group3 <- optim(
  par = initial_params,
  fn = logLikFun,
  method = "BFGS",
  Alpha = data_group3$Alpha,
  x_scaled = data_group3$x_scaled,
  x_scaled2 = data_group3$x_scaled2,
  Ext = data_group3$Ext,
  Dxt = data_group3$Dxt,
  years = data_group3$years,
  ny = ny
)

# Extract optimized parameters
optimized_kappas_group3 <- matrix(opt_result_group3$par, nrow = 3, byrow = TRUE)
colnames(optimized_kappas_group3) <-
min(data_group3$years):max(data_group3$years)
rownames(optimized_kappas_group3) <- c("kappa1", "kappa2", "kappa3")
print(optimized_kappas_group3)

years <- min(data_group3$years):max(data_group3$years)

# Create data frames for each kappa parameter
kappa1_data_group3 <- data.frame(Year = years, Kappa =
optimized_kappas_group3[1, ])
kappa2_data_group3 <- data.frame(Year = years, Kappa =
optimized_kappas_group3[2, ])
kappa3_data_group3 <- data.frame(Year = years, Kappa =
optimized_kappas_group3[3, ])

# Plotting kappa1
p1_group3 <- ggplot(kappa1_data_group3, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "red") +
  labs(title = "Estimated Kappa1 Parameters Over Time",
    x = "Year",
    y = "Kappa1 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa2
p2_group3 <- ggplot(kappa2_data_group3, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "blue") +
  labs(title = "Estimated Kappa2 Parameters Over Time",
    x = "Year",
    y = "Kappa2 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa3
p3_group3 <- ggplot(kappa3_data_group3, aes(x = Year, y = Kappa)) +

```

```

geom_line(color = "green") +
labs(title = "Estimated Kappa3 Parameters Over Time",
      x = "Year",
      y = "Kappa3 Value") +
theme_minimal()

# Display the plots
print(p1_group3)
print(p2_group3)
print(p3_group3)

data_group3 <- data_group3 %>%
  mutate(
    kappa1 = optimized_kappas_group3[1, years - min(years) + 1],
    kappa2 = optimized_kappas_group3[2, years - min(years) + 1],
    kappa3 = optimized_kappas_group3[3, years - min(years) + 1]
  )

#Preparing for cohort calculations
data_group3$cohort <- data_group3$years - data_group3$ages

#Estimating Gamma
gamma_data_group3 <- data_group3 %>%
  group_by(cohort) %>%
  summarize(
    sum_Dxt = sum(Dxt),
    sum_Ext_alpha_kappa = sum(Ext * exp(Alpha + kappa1 + x_scaled * kappa2 +
x_scaled2 * kappa3)),
    .groups = 'drop' # Drop grouping structure after summarization
  ) %>%
  mutate(gamma = log(sum_Dxt / sum_Ext_alpha_kappa))

ggplot(gamma_data_group3, aes(x = cohort, y = gamma)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_point(color = "red", size = 2) +
  labs(title = "Estimated Gamma (Cohort Effects) Over Cohorts",
        x = "Cohort (Year of Birth)",
        y = "Gamma Value") +
  theme_minimal() +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))

data_group3 <- data_group3 %>%
  left_join(gamma_data_group3 %>% select(cohort, gamma), by = "cohort")

data_group3 <- data_group3 %>%
  mutate(
    m_tx = exp(Alpha +
      kappa1 +

```

```

        x_scaled * kappa2 +
        x_scaled2 * kappa3 +
        gamma)
    )

#Umur 40,45,50,55, & 60
data_raw_group4 <- read_excel("C:/Users/Lenovo/OneDrive - UNIVERSITAS
INDONESIA/Documents/Skripsi/Data skripsi group umur.xlsx", sheet = 5)

data_group4 <- data.frame (
  ages = data_raw_group4$`Age (x)`,
  years = data_raw_group4$Year,
  Dxt = as.numeric(data_raw_group4$`Number of deaths d(x,n)`),
  Ext = as.numeric(data_raw_group4$`Number of person-years lived L(x,n)`),
  actual_mtx = as.numeric(data_raw_group4$`Central death rate m(x,n)`))

alpha_estimates_group4 <- data_group4 %>%
  group_by(ages) %>%
  summarise(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext)))

#Estimating Alpha
data_group4 <- data_group4 %>%
  group_by(ages) %>%
  mutate(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext))) %>%
  ungroup()

#Prepare for Kappa
mean_ages_group4 <- mean(data_group4$ages)
var_ages_group4 <- var(data_group4$ages)

data_group4 <- data_group4 %>%
  mutate(
    x_scaled = ages - mean_ages_group4,
    x_scaled2 = (ages - mean_ages_group4)^2 - var_ages_group4
  )

logLikFun <- function(params, Alpha, x_scaled, x_scaled2, Ext, Dxt, years, ny) {
  kappa1 <- params[1:ny] # kappa1 for each year
  kappa2 <- params[(ny+1):(2*ny)] # kappa2 for each year
  kappa3 <- params[(2*ny+1):(3*ny)] # kappa3 for each year

  model_rates <- Alpha + kappa1[years - min(years) + 1] +
    x_scaled * kappa2[years - min(years) + 1] +
    x_scaled2 * kappa3[years - min(years) + 1]

  expected_deaths <- Ext * exp(model_rates)
  logLik <- -sum(Dxt * model_rates - expected_deaths)
  return(logLik)
}

```

```

}

ny <- length(unique(data_group4$years))

# Initial parameter values
initial_params <- c(rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny))

# Call optim using the logLikFun
opt_result_group4 <- optim(
  par = initial_params,
  fn = logLikFun,
  method = "BFGS",
  Alpha = data_group4$Alpha,
  x_scaled = data_group4$x_scaled,
  x_scaled2 = data_group4$x_scaled2,
  Ext = data_group4$Ext,
  Dxt = data_group4$Dxt,
  years = data_group4$years,
  ny = ny
)

# Extract optimized parameters
optimized_kappas_group4 <- matrix(opt_result_group4$par, nrow = 3, byrow = TRUE)
colnames(optimized_kappas_group4) <-
min(data_group4$years):max(data_group4$years)
rownames(optimized_kappas_group4) <- c("kappa1", "kappa2", "kappa3")
print(optimized_kappas_group4)

years <- min(data_group4$years):max(data_group4$years)

# Create data frames for each kappa parameter
kappa1_data_group4 <- data.frame(Year = years, Kappa =
  optimized_kappas_group4[1, ])
kappa2_data_group4 <- data.frame(Year = years, Kappa =
  optimized_kappas_group4[2, ])
kappa3_data_group4 <- data.frame(Year = years, Kappa =
  optimized_kappas_group4[3, ])

# Plotting kappa1
p1_group4 <- ggplot(kappa1_data_group4, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "red") +
  labs(title = "Estimated Kappa1 Parameters Over Time",
    x = "Year",
    y = "Kappa1 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa2
p2_group4 <- ggplot(kappa2_data_group4, aes(x = Year, y = Kappa)) +

```

```

geom_line(color = "blue") +
labs(title = "Estimated Kappa2 Parameters Over Time",
      x = "Year",
      y = "Kappa2 Value") +
theme_minimal()

# Plotting kappa3
p3_group4 <- ggplot(kappa3_data_group4, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "green") +
  labs(title = "Estimated Kappa3 Parameters Over Time",
        x = "Year",
        y = "Kappa3 Value") +
  theme_minimal()

# Display the plots
print(p1_group4)
print(p2_group4)
print(p3_group4)

data_group4 <- data_group4 %>%
  mutate(
    kappa1 = optimized_kappas_group4[1, years - min(years) + 1],
    kappa2 = optimized_kappas_group4[2, years - min(years) + 1],
    kappa3 = optimized_kappas_group4[3, years - min(years) + 1]
  )

#Preparing for cohort calculations
data_group4$cohort <- data_group4$years - data_group4$ages

#Estimating Gamma
gamma_data_group4 <- data_group4 %>%
  group_by(cohort) %>%
  summarize(
    sum_Dxt = sum(Dxt),
    sum_Ext_alpha_kappa = sum(Ext * exp(Alpha + kappa1 + x_scaled * kappa2 +
x_scaled2 * kappa3)),
    .groups = 'drop' # Drop grouping structure after summarization
  ) %>%
  mutate(gamma = log(sum_Dxt / sum_Ext_alpha_kappa))

ggplot(gamma_data_group4, aes(x = cohort, y = gamma)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_point(color = "red", size = 2) +
  labs(title = "Estimated Gamma (Cohort Effects) Over Cohorts",
        x = "Cohort (Year of Birth)",
        y = "Gamma Value") +
  theme_minimal() +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))

```

```

data_group4 <- data_group4 %>%
  left_join(gamma_data_group4 %>% select(cohort, gamma), by = "cohort")

data_group4 <- data_group4 %>%
  mutate(
    m_tx = exp(Alpha +
      kappa1 +
      x_scaled * kappa2 +
      x_scaled2 * kappa3 +
      gamma)
  )

#Umur 65,70,75,80,85, & 90
data_raw_group5 <- read_excel("C:/Users/Lenovo/OneDrive - UNIVERSITAS
INDONESIA/Documents/Skripsi/Data skripsi group umur.xlsx", sheet = 6)

data_group5 <- data.frame (
  ages = data_raw_group5$`Age (x)`,
  years = data_raw_group5$Year,
  Dxt = as.numeric(data_raw_group5$`Number of deaths d(x,n)`),
  Ext = as.numeric(data_raw_group5$`Number of person-years lived L(x,n)`),
  actual_mtx = as.numeric(data_raw_group5$`Central death rate m(x,n)`))

data_group5 <- data_group5 %>%
  filter(ages <= 90)

alpha_estimates_group5 <- data_group5 %>%
  group_by(ages) %>%
  summarise(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext)))

#Estimating Alpha
data_group5 <- data_group5 %>%
  group_by(ages) %>%
  mutate(Alpha = log(sum(Dxt) / sum(Ext))) %>%
  ungroup()

#Prepare for Kappa
mean_ages_group5 <- mean(data_group5$ages)
var_ages_group5 <- var(data_group5$ages)

data_group5 <- data_group5 %>%
  mutate(
    x_scaled = ages - mean_ages_group5,
    x_scaled2 = (ages - mean_ages_group5)^2 - var_ages_group5
  )

logLikFun <- function(params, Alpha, x_scaled, x_scaled2, Ext, Dxt, years, ny) {

```

```

kappa1 <- params[1:ny] # kappa1 for each year
kappa2 <- params[(ny+1):(2*ny)] # kappa2 for each year
kappa3 <- params[(2*ny+1):(3*ny)] # kappa3 for each year

model_rates <- Alpha + kappa1[years - min(years) + 1] +
  x_scaled * kappa2[years - min(years) + 1] +
  x_scaled2 * kappa3[years - min(years) + 1]

expected_deaths <- Ext * exp(model_rates)
logLik <- -sum(Dxt * model_rates - expected_deaths)
return(logLik)
}

ny <- length(unique(data_group5$years))

# Initial parameter values
initial_params <- c(rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny), rep(0.00001, ny))

# Call optim using the logLikFun
opt_result_group5 <- optim(
  par = initial_params,
  fn = logLikFun,
  method = "BFGS",
  Alpha = data_group5$Alpha,
  x_scaled = data_group5$x_scaled,
  x_scaled2 = data_group5$x_scaled2,
  Ext = data_group5$Ext,
  Dxt = data_group5$Dxt,
  years = data_group5$years,
  ny = ny
)

# Extract optimized parameters
optimized_kappas_group5 <- matrix(opt_result_group5$par, nrow = 3, byrow = TRUE)
colnames(optimized_kappas_group5) <-
min(data_group5$years):max(data_group5$years)
rownames(optimized_kappas_group5) <- c("kappa1", "kappa2", "kappa3")
print(optimized_kappas_group5)

years <- min(data_group5$years):max(data_group5$years)

# Create data frames for each kappa parameter
kappa1_data_group5 <- data.frame(Year = years, Kappa = optimized_kappas_group5[1,
])
kappa2_data_group5 <- data.frame(Year = years, Kappa = optimized_kappas_group5[2,
])
kappa3_data_group5 <- data.frame(Year = years, Kappa = optimized_kappas_group5[3,
])

```

```

# Plotting kappa1
p1_group5 <- ggplot(kappa1_data_group5, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "red") +
  labs(title = "Estimated Kappa1 Parameters Over Time",
        x = "Year",
        y = "Kappa1 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa2
p2_group5 <- ggplot(kappa2_data_group5, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "blue") +
  labs(title = "Estimated Kappa2 Parameters Over Time",
        x = "Year",
        y = "Kappa2 Value") +
  theme_minimal()

# Plotting kappa3
p3_group5 <- ggplot(kappa3_data_group5, aes(x = Year, y = Kappa)) +
  geom_line(color = "green") +
  labs(title = "Estimated Kappa3 Parameters Over Time",
        x = "Year",
        y = "Kappa3 Value") +
  theme_minimal()

# Display the plots
print(p1_group5)
print(p2_group5)
print(p3_group5)

data_group5 <- data_group5 %>%
  mutate(
    kappa1 = optimized_kappas_group5[1, years - min(years) + 1],
    kappa2 = optimized_kappas_group5[2, years - min(years) + 1],
    kappa3 = optimized_kappas_group5[3, years - min(years) + 1]
  )

#Preparing for cohort calculations
data_group5$cohort <- data_group5$years - data_group5$ages

#Estimating Gamma
gamma_data_group5 <- data_group5 %>%
  group_by(cohort) %>%
  summarize(
    sum_Dxt = sum(Dxt),
    sum_Ext_alpha_kappa = sum(Ext * exp(Alpha + kappa1 + x_scaled * kappa2 +
x_scaled2 * kappa3)),
    .groups = 'drop' # Drop grouping structure after summarization

```

```

) %>%
mutate(gamma = log(sum_Dxt / sum_Ext_alpha_kappa))

ggplot(gamma_data_group5, aes(x = cohort, y = gamma)) +
  geom_line(color = "blue") +
  geom_point(color = "red", size = 2) +
  labs(title = "Estimated Gamma (Cohort Effects) Over Cohorts",
       x = "Cohort (Year of Birth)",
       y = "Gamma Value") +
  theme_minimal() +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))

data_group5 <- data_group5 %>%
  left_join(gamma_data_group5 %>% select(cohort, gamma), by = "cohort")

data_group5 <- data_group5 %>%
  mutate(
    m_tx = exp(Alpha +
               kappa1 +
               x_scaled * kappa2 +
               x_scaled2 * kappa3 +
               gamma)
  )

```

Lampiran 2. Data ${}_n m_{x,t}$ Aktual Penduduk Indonesia

x	n	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
0	1	0.21804	0.21491	0.20866	0.20255	0.19668	0.19092	0.18533	0.17998
1	4	0.03920	0.03836	0.03640	0.03459	0.03298	0.03135	0.02980	0.02837
5	5	0.00864	0.00848	0.00806	0.00777	0.00744	0.00716	0.00681	0.00654
10	5	0.00494	0.00486	0.00463	0.00450	0.00432	0.00419	0.00399	0.00385
15	5	0.00634	0.00623	0.00597	0.00585	0.00564	0.00550	0.00526	0.00511
20	5	0.00866	0.00849	0.00814	0.00795	0.00766	0.00745	0.00711	0.00691
25	5	0.00914	0.00896	0.00859	0.00839	0.00809	0.00786	0.00750	0.00728
30	5	0.00988	0.00971	0.00933	0.00912	0.00881	0.00858	0.00820	0.00798
35	5	0.01100	0.01083	0.01046	0.01025	0.00996	0.00972	0.00934	0.00912
40	5	0.01251	0.01237	0.01201	0.01180	0.01153	0.01129	0.01092	0.01071
45	5	0.01417	0.01406	0.01373	0.01356	0.01333	0.01313	0.01280	0.01262
50	5	0.01791	0.01784	0.01752	0.01736	0.01715	0.01695	0.01660	0.01642
55	5	0.02309	0.02303	0.02270	0.02258	0.02240	0.02225	0.02191	0.02177
60	5	0.03410	0.03404	0.03362	0.03346	0.03325	0.03304	0.03261	0.03243
65	5	0.04945	0.04942	0.04895	0.04880	0.04862	0.04842	0.04794	0.04775
70	5	0.07729	0.07731	0.07673	0.07653	0.07637	0.07611	0.07553	0.07530
75	5	0.11554	0.11568	0.11509	0.11494	0.11493	0.11471	0.11413	0.11395
80	5	0.17249	0.17273	0.17202	0.17181	0.17191	0.17164	0.17100	0.17081
85	5	0.24510	0.24561	0.24496	0.24484	0.24529	0.24512	0.24463	0.24457
90	5	0.33158	0.33253	0.33207	0.33206	0.33283	0.33268	0.33228	0.33232

x	n	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
0	1	0.17484	0.17005	0.16547	0.16114	0.15692	0.15287	0.14881	0.15856
1	4	0.02702	0.02576	0.02461	0.02355	0.02250	0.02156	0.02055	0.02597
5	5	0.00623	0.00598	0.00578	0.00555	0.00533	0.00515	0.00487	0.00704
10	5	0.00369	0.00356	0.00346	0.00334	0.00322	0.00313	0.00296	0.00412
15	5	0.00504	0.00482	0.00471	0.00457	0.00438	0.00427	0.00405	0.00666
20	5	0.00697	0.00658	0.00643	0.00622	0.00587	0.00571	0.00542	0.01034
25	5	0.00734	0.00693	0.00677	0.00654	0.00618	0.00601	0.00570	0.01087
30	5	0.00799	0.00760	0.00743	0.00718	0.00683	0.00666	0.00633	0.01091
35	5	0.00910	0.00872	0.00855	0.00829	0.00795	0.00778	0.00744	0.01208
40	5	0.01066	0.01030	0.01014	0.00987	0.00954	0.00937	0.00903	0.01387
45	5	0.01259	0.01226	0.01212	0.01187	0.01156	0.01142	0.01108	0.01646
50	5	0.01635	0.01603	0.01589	0.01564	0.01534	0.01520	0.01483	0.02082
55	5	0.02171	0.02139	0.02127	0.02101	0.02069	0.02055	0.02013	0.02741
60	5	0.03228	0.03194	0.03182	0.03152	0.03119	0.03103	0.03052	0.03968
65	5	0.04758	0.04719	0.04705	0.04673	0.04635	0.04620	0.04560	0.05790
70	5	0.07506	0.07459	0.07441	0.07401	0.07353	0.07333	0.07251	0.08889
75	5	0.11379	0.11328	0.11313	0.11276	0.11225	0.11209	0.11116	0.13240
80	5	0.17060	0.17000	0.16983	0.16943	0.16885	0.16866	0.16752	0.18914
85	5	0.24452	0.24400	0.24394	0.24374	0.24324	0.24321	0.24205	0.26400
90	5	0.33243	0.33190	0.33192	0.33187	0.33144	0.33155	0.33026	0.35242

x	n	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------

0	1	0.14243	0.13672	0.13274	0.12863	0.12466	0.12090	0.11726	0.11364
1	4	0.01996	0.01794	0.01712	0.01622	0.01543	0.01468	0.01399	0.01327
5	5	0.00556	0.00431	0.00415	0.00394	0.00376	0.00361	0.00344	0.00329
10	5	0.00388	0.00266	0.00257	0.00246	0.00236	0.00227	0.00218	0.00209
15	5	0.00500	0.00370	0.00360	0.00346	0.00333	0.00323	0.00310	0.00300
20	5	0.00636	0.00490	0.00478	0.00457	0.00440	0.00426	0.00407	0.00393
25	5	0.00682	0.00515	0.00501	0.00478	0.00459	0.00444	0.00424	0.00408
30	5	0.00750	0.00574	0.00559	0.00535	0.00516	0.00499	0.00477	0.00460
35	5	0.00873	0.00682	0.00666	0.00641	0.00620	0.00602	0.00578	0.00560
40	5	0.01019	0.00840	0.00823	0.00796	0.00774	0.00756	0.00729	0.00709
45	5	0.01223	0.01050	0.01035	0.01008	0.00988	0.00970	0.00942	0.00922
50	5	0.01593	0.01421	0.01405	0.01376	0.01354	0.01335	0.01305	0.01283
55	5	0.02125	0.01954	0.01939	0.01908	0.01884	0.01864	0.01830	0.01806
60	5	0.03152	0.02974	0.02953	0.02913	0.02884	0.02859	0.02816	0.02786
65	5	0.04679	0.04490	0.04471	0.04424	0.04391	0.04359	0.04306	0.04269
70	5	0.07392	0.07159	0.07136	0.07077	0.07043	0.07005	0.06942	0.06895
75	5	0.11327	0.11036	0.11014	0.10944	0.10911	0.10865	0.10798	0.10747
80	5	0.16976	0.16672	0.16646	0.16567	0.16538	0.16482	0.16406	0.16341
85	5	0.24483	0.24189	0.24177	0.24111	0.24116	0.24069	0.24017	0.23960
90	5	0.33340	0.33048	0.33043	0.33004	0.33060	0.33030	0.33010	0.32964

x	n	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
0	1	0.11017	0.10688	0.10379	0.10076	0.09794	0.09524	0.09254	0.08995

1	4	0.01260	0.01199	0.01140	0.01084	0.01032	0.00989	0.00943	0.00903
5	5	0.00314	0.00300	0.00286	0.00272	0.00262	0.00250	0.00237	0.00229
10	5	0.00201	0.00194	0.00186	0.00177	0.00172	0.00165	0.00156	0.00152
15	5	0.00290	0.00281	0.00273	0.00262	0.00256	0.00244	0.00232	0.00228
20	5	0.00380	0.00368	0.00358	0.00344	0.00335	0.00315	0.00299	0.00294
25	5	0.00394	0.00382	0.00371	0.00357	0.00347	0.00326	0.00309	0.00303
30	5	0.00445	0.00431	0.00418	0.00402	0.00391	0.00370	0.00351	0.00344
35	5	0.00543	0.00528	0.00512	0.00495	0.00482	0.00459	0.00438	0.00430
40	5	0.00690	0.00674	0.00656	0.00637	0.00622	0.00597	0.00574	0.00564
45	5	0.00903	0.00886	0.00866	0.00846	0.00830	0.00803	0.00777	0.00766
50	5	0.01263	0.01245	0.01222	0.01199	0.01180	0.01150	0.01119	0.01105
55	5	0.01784	0.01764	0.01739	0.01714	0.01695	0.01662	0.01627	0.01613
60	5	0.02756	0.02731	0.02694	0.02661	0.02632	0.02592	0.02546	0.02528
65	5	0.04232	0.04201	0.04156	0.04117	0.04081	0.04035	0.03978	0.03956
70	5	0.06847	0.06804	0.06738	0.06680	0.06623	0.06568	0.06494	0.06466
75	5	0.10695	0.10653	0.10579	0.10519	0.10446	0.10394	0.10309	0.10275
80	5	0.16274	0.16218	0.16117	0.16043	0.15944	0.15908	0.15819	0.15793
85	5	0.23900	0.23853	0.23747	0.23676	0.23552	0.23554	0.23474	0.23465
90	5	0.32917	0.32884	0.32767	0.32707	0.32547	0.32619	0.32561	0.32583

x	n	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
0	1	0.08731	0.08467	0.08205	0.07943	0.07685	0.07424	0.07162	0.06893
1	4	0.00861	0.00819	0.00777	0.00738	0.00700	0.00662	0.00626	0.00591

5	5	0.00217	0.00206	0.00198	0.00187	0.00180	0.00176	0.00170	0.00162
10	5	0.00145	0.00138	0.00134	0.00127	0.00123	0.00121	0.00119	0.00113
15	5	0.00216	0.00208	0.00202	0.00193	0.00188	0.00188	0.00187	0.00180
20	5	0.00277	0.00265	0.00258	0.00244	0.00237	0.00237	0.00237	0.00228
25	5	0.00285	0.00273	0.00265	0.00251	0.00244	0.00244	0.00244	0.00235
30	5	0.00325	0.00312	0.00303	0.00287	0.00280	0.00280	0.00281	0.00270
35	5	0.00408	0.00393	0.00383	0.00365	0.00356	0.00357	0.00358	0.00346
40	5	0.00539	0.00522	0.00509	0.00489	0.00479	0.00480	0.00482	0.00468
45	5	0.00738	0.00720	0.00705	0.00682	0.00671	0.00673	0.00678	0.00662
50	5	0.01071	0.01050	0.01031	0.01003	0.00991	0.00993	0.01000	0.00982
55	5	0.01573	0.01548	0.01526	0.01491	0.01477	0.01481	0.01491	0.01469
60	5	0.02478	0.02448	0.02418	0.02373	0.02354	0.02357	0.02369	0.02338
65	5	0.03893	0.03852	0.03814	0.03757	0.03733	0.03738	0.03753	0.03716
70	5	0.06385	0.06331	0.06275	0.06198	0.06159	0.06153	0.06158	0.06104
75	5	0.10177	0.10111	0.10036	0.09944	0.09896	0.09882	0.09879	0.09814
80	5	0.15688	0.15615	0.15519	0.15408	0.15339	0.15305	0.15282	0.15203
85	5	0.23378	0.23318	0.23226	0.23137	0.23077	0.23036	0.22998	0.22931
90	5	0.32516	0.32467	0.32358	0.32279	0.32221	0.32178	0.32142	0.32120

x	n	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
0	1	0.06623	0.06350	0.06083	0.05818	0.05562	0.05318	0.05085	0.04866
1	4	0.00553	0.00519	0.00486	0.00455	0.00425	0.00397	0.00371	0.00349
5	5	0.00153	0.00148	0.00139	0.00130	0.00127	0.00121	0.00118	0.00113

10	5	0.00108	0.00106	0.00100	0.00095	0.00093	0.00090	0.00089	0.00085
15	5	0.00174	0.00171	0.00163	0.00156	0.00156	0.00151	0.00154	0.00149
20	5	0.00221	0.00217	0.00205	0.00197	0.00196	0.00191	0.00195	0.00189
25	5	0.00228	0.00224	0.00211	0.00202	0.00202	0.00197	0.00202	0.00195
30	5	0.00262	0.00258	0.00244	0.00234	0.00234	0.00229	0.00234	0.00227
35	5	0.00337	0.00332	0.00316	0.00305	0.00305	0.00298	0.00305	0.00297
40	5	0.00457	0.00452	0.00432	0.00420	0.00420	0.00413	0.00421	0.00412
45	5	0.00649	0.00643	0.00621	0.00608	0.00609	0.00601	0.00613	0.00603
50	5	0.00964	0.00958	0.00929	0.00914	0.00915	0.00905	0.00920	0.00907
55	5	0.01447	0.01440	0.01404	0.01387	0.01390	0.01378	0.01397	0.01382
60	5	0.02304	0.02292	0.02242	0.02217	0.02216	0.02197	0.02217	0.02195
65	5	0.03669	0.03654	0.03588	0.03555	0.03549	0.03521	0.03539	0.03507
70	5	0.06031	0.06005	0.05914	0.05866	0.05849	0.05804	0.05809	0.05760
75	5	0.09706	0.09668	0.09545	0.09478	0.09444	0.09379	0.09363	0.09298
80	5	0.15060	0.15015	0.14860	0.14777	0.14723	0.14632	0.14581	0.14494
85	5	0.22729	0.22679	0.22504	0.22413	0.22338	0.22233	0.22136	0.22045
90	5	0.31954	0.31946	0.31780	0.31715	0.31640	0.31535	0.31389	0.31311

x	n	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
0	1	0.04652	0.04450	0.04261	0.04080	0.03908	0.03746	0.03807	0.03447
1	4	0.00326	0.00305	0.00287	0.00269	0.00252	0.00238	0.00336	0.00212
5	5	0.00109	0.00104	0.00102	0.00097	0.00092	0.00088	0.00164	0.00085
10	5	0.00084	0.00081	0.00080	0.00076	0.00074	0.00071	0.00125	0.00070

15	5	0.00148	0.00145	0.00145	0.00140	0.00137	0.00133	0.00182	0.00134
20	5	0.00188	0.00186	0.00185	0.00180	0.00175	0.00171	0.00218	0.00173
25	5	0.00195	0.00193	0.00192	0.00187	0.00182	0.00178	0.00226	0.00180
30	5	0.00227	0.00225	0.00224	0.00219	0.00213	0.00208	0.00262	0.00211
35	5	0.00297	0.00295	0.00294	0.00288	0.00280	0.00275	0.00335	0.00279
40	5	0.00412	0.00410	0.00409	0.00402	0.00392	0.00387	0.00453	0.00392
45	5	0.00603	0.00603	0.00602	0.00595	0.00582	0.00577	0.00652	0.00584
50	5	0.00908	0.00908	0.00907	0.00899	0.00882	0.00877	0.00965	0.00887
55	5	0.01383	0.01382	0.01381	0.01369	0.01346	0.01338	0.01439	0.01353
60	5	0.02192	0.02189	0.02183	0.02164	0.02128	0.02114	0.02221	0.02120
65	5	0.03496	0.03485	0.03472	0.03442	0.03390	0.03367	0.03485	0.03365
70	5	0.05732	0.05701	0.05672	0.05617	0.05532	0.05487	0.05622	0.05454
75	5	0.09254	0.09199	0.09156	0.09076	0.08956	0.08887	0.08988	0.08810
80	5	0.14422	0.14327	0.14270	0.14160	0.14005	0.13916	0.13988	0.13806
85	5	0.21948	0.21808	0.21739	0.21595	0.21401	0.21286	0.21321	0.21122
90	5	0.31205	0.31041	0.30991	0.30849	0.30637	0.30537	0.30551	0.30360

x	n	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
0	1	0.03317	0.03181	0.03055	0.02939	0.02828	0.02719	0.02616	0.02518
1	4	0.00203	0.00190	0.00179	0.00170	0.00161	0.00152	0.00145	0.00138
5	5	0.00082	0.00078	0.00077	0.00073	0.00072	0.00069	0.00067	0.00064
10	5	0.00068	0.00065	0.00065	0.00062	0.00062	0.00060	0.00059	0.00056
15	5	0.00131	0.00128	0.00130	0.00126	0.00125	0.00124	0.00123	0.00118

20	5	0.00169	0.00165	0.00168	0.00164	0.00163	0.00162	0.00161	0.00155
25	5	0.00176	0.00173	0.00176	0.00172	0.00170	0.00170	0.00169	0.00163
30	5	0.00206	0.00202	0.00207	0.00202	0.00200	0.00200	0.00199	0.00192
35	5	0.00273	0.00269	0.00274	0.00268	0.00266	0.00266	0.00265	0.00257
40	5	0.00385	0.00379	0.00386	0.00379	0.00376	0.00376	0.00375	0.00366
45	5	0.00576	0.00569	0.00578	0.00570	0.00566	0.00566	0.00565	0.00554
50	5	0.00877	0.00867	0.00879	0.00869	0.00863	0.00863	0.00861	0.00848
55	5	0.01341	0.01330	0.01346	0.01334	0.01326	0.01325	0.01323	0.01305
60	5	0.02098	0.02079	0.02093	0.02073	0.02061	0.02059	0.02055	0.02033
65	5	0.03330	0.03298	0.03308	0.03271	0.03246	0.03232	0.03216	0.03178
70	5	0.05394	0.05341	0.05338	0.05275	0.05232	0.05198	0.05162	0.05099
75	5	0.08715	0.08632	0.08604	0.08504	0.08435	0.08375	0.08312	0.08223
80	5	0.13675	0.13568	0.13515	0.13374	0.13279	0.13187	0.13092	0.12970
85	5	0.20958	0.20834	0.20749	0.20574	0.20462	0.20339	0.20212	0.20071
90	5	0.30176	0.30044	0.29937	0.29746	0.29637	0.29511	0.29384	0.29262

x	n	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
0	1	0.02422	0.02330	0.02244	0.02162	0.02091	0.02017	0.01950	0.01887
1	4	0.00131	0.00125	0.00119	0.00113	0.00111	0.00104	0.00100	0.00096
5	5	0.00062	0.00060	0.00058	0.00057	0.00055	0.00052	0.00051	0.00050
10	5	0.00055	0.00054	0.00053	0.00052	0.00050	0.00048	0.00047	0.00047
15	5	0.00116	0.00114	0.00114	0.00113	0.00107	0.00105	0.00104	0.00116
20	5	0.00152	0.00150	0.00150	0.00150	0.00141	0.00139	0.00138	0.00153

25	5	0.00159	0.00158	0.00158	0.00158	0.00148	0.00147	0.00146	0.00164
30	5	0.00188	0.00187	0.00187	0.00187	0.00176	0.00174	0.00179	0.00201
35	5	0.00251	0.00250	0.00250	0.00250	0.00236	0.00234	0.00252	0.00283
40	5	0.00358	0.00356	0.00357	0.00356	0.00339	0.00336	0.00378	0.00424
45	5	0.00544	0.00541	0.00543	0.00542	0.00519	0.00516	0.00595	0.00675
50	5	0.00833	0.00829	0.00831	0.00829	0.00799	0.00794	0.00945	0.01071
55	5	0.01285	0.01279	0.01280	0.01276	0.01236	0.01229	0.01496	0.01685
60	5	0.02004	0.01992	0.01990	0.01981	0.01928	0.01914	0.02381	0.02693
65	5	0.03137	0.03118	0.03113	0.03099	0.03031	0.03009	0.03759	0.04236
70	5	0.05029	0.04983	0.04956	0.04917	0.04822	0.04781	0.05869	0.06597
75	5	0.08121	0.08044	0.07993	0.07922	0.07793	0.07717	0.09064	0.10176
80	5	0.12832	0.12720	0.12645	0.12541	0.12385	0.12277	0.14472	0.16166
85	5	0.19900	0.19745	0.19636	0.19486	0.19321	0.19171	0.23173	0.25969
90	5	0.29087	0.28922	0.28817	0.28648	0.28503	0.28332	0.32444	0.35350

Lampiran 3. Nilai Estimasi Parameter $\alpha(x)$, $\kappa(t)$, dan $\gamma(c)$
Pada Skenario 2

Nilai Estimasi dari $\alpha(x)$

Usia (x)	$\hat{\alpha}(x)$	Usia (x)	$\hat{\alpha}(x)$
0	-2.42728	45	-4.85545
1	-4.56023	50	-4.50574
5	-5.95077	55	-4.13876
10	-6.3925	60	-3.7041
15	-5.99562	65	-3.26958
20	-5.72089	70	-2.79681
25	-5.68349	75	-2.34377
30	-5.57425	80	-1.91435
35	-5.38207	85	-1.51076
40	-5.14003	90	-1.16893

Nilai Estimasi $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk usia 0 & 1

Tahun (t)	$\widehat{\kappa}_1(t)$	$\widehat{\kappa}_2(t)$	$\widehat{\kappa}_3(t)$
1950	1.113246	0.418991	-0.00197
1951	1.09557	0.41369	-0.00194
1952	1.053099	0.380028	-0.00186
⋮	⋮	⋮	⋮
1985	-0.23359	-0.26428	0.000408
1986	-0.27479	-0.28845	0.00048
1987	-0.31957	-0.27531	0.000559
⋮	⋮	⋮	⋮
2020	-1.90423	-0.80382	0.003335
2021	-1.96085	-0.84108	0.003436

Nilai Estimasi $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk usia $5 \leq x < 20$ tahun

Tahun (t)	$\widehat{\kappa}_1(t)$	$\widehat{\kappa}_2(t)$	$\widehat{\kappa}_3(t)$
1950	1.084939	-0.02779	0.001979
1951	1.066514	-0.0291	0.001671
1952	1.019422	-0.02838	-0.00081

⋮	⋮	⋮	⋮
1985	-0.29091	0.007657	0.000163
1986	-0.32714	0.008831	0.000247
1987	-0.33879	0.01108	0.000227
⋮	⋮	⋮	⋮
2020	-1.23588	0.077587	-0.00025
2021	-1.20469	0.089089	0.001966

Nilai Estimasi $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk usia $20 \leq x < 40$ tahun

Tahun (t)	$\widehat{\kappa}_1(t)$	$\widehat{\kappa}_2(t)$	$\widehat{\kappa}_3(t)$
1950	1.213411	-0.02214	0.004219
1951	1.186485	-0.02683	-0.00095
1952	1.141933	-0.02406	0.001707
⋮	⋮	⋮	⋮
1985	-0.43146	0.000854	-0.00223
1986	-0.46743	0.011826	-0.0035
1987	-0.46657	0.009972	-0.00324
⋮	⋮	⋮	⋮

2020	-1.22232	0.051039	0.003484
2021	-0.96246	0.035796	0.001231

Nilai Estimasi $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk usia $40 \leq x < 65$ tahun

Tahun (t)	$\widehat{\kappa}_1(t)$	$\widehat{\kappa}_2(t)$	$\widehat{\kappa}_3(t)$
1950	0.506092	-0.02181	0.000687
1951	0.499426	-0.02129	0.000657
1952	0.487013	-0.02067	0.000626
⋮	⋮	⋮	⋮
1985	-0.10164	0.006974	-0.00011
1986	-0.11448	0.007574	-0.00013
1987	-0.11199	0.007531	-0.00014
⋮	⋮	⋮	⋮
2020	-0.18931	0.020105	-0.00086
2021	-0.06256	0.019796	-0.00085

Nilai Estimasi $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\kappa_3(t)$ untuk usia ≥ 65 tahun

Tahun (t)	$\widehat{\kappa}_1(t)$	$\widehat{\kappa}_2(t)$	$\widehat{\kappa}_3(t)$
1950	0.175052	-0.00718	-2.45E-05

1951	0.176667	-0.00692	-7.10E-06
1952	0.172703	-0.00692	1.64E-05
⋮	⋮	⋮	⋮
1985	0.026479	0.001927	-0.00019
1986	0.022387	0.002169	-0.00018
1987	0.021387	0.002086	-0.00017
⋮	⋮	⋮	⋮
2020	-0.0013	0.004337	0.000467
2021	0.104533	0.002712	0.000387

Nilai Estimasi $\gamma(c)$ untuk usia 0 & 1

Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$	Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$
1950	-0.00078	1990	-0.01596
1949	-0.00164	1991	0.015138
1951	0.002055	1992	0.00215
⋮	⋮	⋮	⋮
1965	0.001034	2000	-0.00939
1966	0.006385	2001	-0.00387

1967	0.000622	2002	0.008988
⋮	⋮	⋮	⋮
1975	-0.00729	2020	-0.00773
1976	-0.00308	2021	-0.00251

Nilai Estimasi $\gamma(c)$ untuk usia $5 \leq x < 20$ tahun

Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$	Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$
1935	-0.02694	1990	0.006945
1936	-0.0169	1991	0.004022
1937	0.004572	1992	0.001814
⋮	⋮	⋮	⋮
1949	-0.01722	2000	-0.0058
1950	0.025272	2001	-0.00656
1951	-0.01742	2002	-0.008
⋮	⋮	⋮	⋮
1970	0.011273	2015	-0.00637
1971	0.022793	2016	-0.0175

Nilai Estimasi $\gamma(c)$ untuk usia $20 \leq x < 40$ tahun

Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$	Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$
1915	-0.28055	1970	0.192642
1916	-0.10458	1971	0.202569
1917	-0.18224	1972	0.176287
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1930	-0.83719	1990	0.494942
1931	-0.18539	1991	0.415137
1932	-0.22553	1992	0.511565
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1950	0.001097	2000	0.650806
1951	-0.0067	2001	0.439579

Nilai Estimasi $\gamma(c)$ untuk usia $45 \leq x < 65$ tahun

Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$	Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$
1890	0.003492	1950	-0.00296

1891	0.004667	1951	-0.00269
1892	-1.82E-05	1952	-0.00252
⋮	⋮	⋮	⋮
1900	0.002386	1970	-0.0074
1901	0.002765	1971	-0.00799
1902	0.001263	1972	-0.00461
⋮	⋮	⋮	⋮
1920	0.006455	1980	-0.00412
1921	0.002708	1981	-0.01973

Nilai Estimasi $\gamma(c)$ untuk usia ≥ 65 tahun

Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$	Tahun Kelahiran (c)	$\hat{\gamma}(c)$
1860	-0.0182	1900	0.002066
1861	-0.02168	1901	0.000352
1862	-0.02105	1902	0.001063
⋮	⋮	⋮	⋮

1870	-0.00974	1930	-0.00317
1871	-0.01002	1931	-0.00279
1872	-0.00978	1932	-0.00216
⋮	⋮	⋮	⋮
1885	-0.00317	1955	0.005188
1886	-0.00439	1956	0.005198

Lampiran 4. Data Estimasi ${}_n\hat{m}_{x,t}$ Penduduk Indonesia
Pada Skenario 2

x	n	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
0	1	0.21777	0.21513	0.20835	0.20243	0.19769	0.19053	0.18533	0.18061
1	4	0.03920	0.03844	0.03633	0.03467	0.03302	0.03106	0.02991	0.02837
5	5	0.00877	0.00864	0.00812	0.00780	0.00743	0.00743	0.00675	0.00641
10	5	0.00482	0.00473	0.00459	0.00441	0.00425	0.00410	0.00390	0.00384
15	5	0.00634	0.00623	0.00597	0.00585	0.00564	0.00562	0.00538	0.00515
20	5	0.00626	0.01065	0.01024	0.00934	0.00900	0.01032	0.00863	0.00811
25	5	0.00957	0.01003	0.00935	0.00994	0.00905	0.00450	0.00802	0.00764
30	5	0.00978	0.00998	0.00950	0.00950	0.00899	0.00890	0.00788	0.00816
35	5	0.01100	0.01083	0.01046	0.01025	0.00996	0.00982	0.00908	0.00896
40	5	0.01259	0.01238	0.01212	0.01187	0.01156	0.01131	0.01093	0.01074
45	5	0.01425	0.01408	0.01385	0.01364	0.01337	0.01319	0.01283	0.01266

50	5	0.01774	0.01766	0.01744	0.01726	0.01702	0.01686	0.01649	0.01633
55	5	0.02328	0.02320	0.02293	0.02276	0.02254	0.02243	0.02212	0.02195
60	5	0.03410	0.03404	0.03362	0.03346	0.03325	0.03285	0.03244	0.03219
65	5	0.04929	0.04922	0.04912	0.04922	0.04904	0.04896	0.04843	0.04829
70	5	0.07652	0.07623	0.07586	0.07581	0.07602	0.07600	0.07529	0.07505
75	5	0.11570	0.11532	0.11461	0.11439	0.11488	0.11581	0.11468	0.11439
80	5	0.17113	0.17127	0.17036	0.17008	0.17036	0.17115	0.16988	0.16964
85	5	0.24517	0.24551	0.24459	0.24445	0.24471	0.24680	0.24640	0.24664
90	5	0.33158	0.33253	0.33207	0.33206	0.33283	0.33246	0.33263	0.33363

x	n	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
0	1	0.17518	0.17005	0.16459	0.16081	0.15738	0.15308	0.14802	0.15755
1	4	0.02684	0.02567	0.02461	0.02379	0.02259	0.02143	0.02050	0.02619
5	5	0.00614	0.00593	0.00489	0.00548	0.00532	0.00515	0.00485	0.00662
10	5	0.00369	0.00357	0.00364	0.00341	0.00329	0.00318	0.00299	0.00553
15	5	0.00512	0.00489	0.00468	0.00451	0.00434	0.00425	0.00405	0.00620
20	5	0.00893	0.00770	0.00979	0.00772	0.00690	0.00646	0.00522	0.01546
25	5	0.00739	0.00662	0.00801	0.00621	0.00600	0.00602	0.00659	0.00598
30	5	0.00772	0.00835	0.00393	0.00650	0.00617	0.00607	0.00610	0.00615
35	5	0.00873	0.00855	0.00784	0.00763	0.00708	0.00661	0.00582	0.02224
40	5	0.01071	0.01033	0.01019	0.00986	0.00952	0.00935	0.00901	0.01365
45	5	0.01263	0.01229	0.01215	0.01185	0.01153	0.01137	0.01103	0.01607
50	5	0.01629	0.01595	0.01586	0.01553	0.01519	0.01505	0.01470	0.02053

55	5	0.02191	0.02159	0.02152	0.02114	0.02079	0.02064	0.02025	0.02724
60	5	0.03210	0.03180	0.03180	0.03149	0.03107	0.03093	0.03044	0.03935
65	5	0.04801	0.04765	0.04747	0.04696	0.04656	0.04625	0.04575	0.05763
70	5	0.07476	0.07436	0.07424	0.07362	0.07312	0.07297	0.07196	0.08820
75	5	0.11422	0.11364	0.11358	0.11306	0.11242	0.11232	0.11092	0.13112
80	5	0.16967	0.16876	0.17014	0.16941	0.16874	0.16881	0.16703	0.18765
85	5	0.24690	0.24552	0.24700	0.24629	0.24579	0.24591	0.24425	0.25924
90	5	0.33385	0.33397	0.33799	0.33815	0.33842	0.33822	0.33813	0.33080

x	n	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
0	1	0.14214	0.13741	0.13299	0.12791	0.12454	0.12173	0.11714	0.11293
1	4	0.02023	0.01802	0.01693	0.01615	0.01563	0.01472	0.01377	0.01330
5	5	0.00559	0.00425	0.00412	0.00391	0.00374	0.00354	0.00342	0.00326
10	5	0.00395	0.00268	0.00258	0.00249	0.00252	0.00230	0.00223	0.00214
15	5	0.00498	0.00375	0.00364	0.00348	0.00287	0.00322	0.00310	0.00299
20	5	0.00902	0.00543	0.00603	0.00614	0.00550	0.00533	0.00521	0.00496
25	5	0.00745	0.00547	0.00454	0.00412	0.00290	0.00347	0.00403	0.00402
30	5	0.00654	0.00524	0.00440	0.00392	0.00536	0.00377	0.00385	0.00393
35	5	0.00689	0.00523	0.00593	0.00572	0.00647	0.00585	0.00534	0.00495
40	5	0.01019	0.00836	0.00819	0.00792	0.00770	0.00752	0.00726	0.00706
45	5	0.01218	0.01044	0.01029	0.01003	0.00984	0.00964	0.00937	0.00917
50	5	0.01584	0.01410	0.01394	0.01366	0.01350	0.01327	0.01297	0.01277

55	5	0.02138	0.01962	0.01947	0.01917	0.01897	0.01873	0.01840	0.01816
60	5	0.03148	0.02962	0.02942	0.02904	0.02887	0.02853	0.02808	0.02781
65	5	0.04703	0.04493	0.04477	0.04430	0.04399	0.04369	0.04311	0.04273
70	5	0.07375	0.07113	0.07099	0.07048	0.07030	0.06985	0.06933	0.06887
75	5	0.11336	0.11021	0.11001	0.10953	0.10923	0.10874	0.10835	0.10792
80	5	0.17014	0.16660	0.16596	0.16561	0.16561	0.16463	0.16413	0.16359
85	5	0.24876	0.24549	0.24439	0.24328	0.24330	0.24189	0.24067	0.23943
90	5	0.34070	0.33886	0.33714	0.33368	0.33575	0.33269	0.32997	0.32796

x	n	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
0	1	0.11021	0.10670	0.10301	0.10046	0.09878	0.09531	0.09152	0.08913
1	4	0.01279	0.01198	0.01145	0.01105	0.01040	0.00967	0.00941	0.00929
5	5	0.00310	0.00302	0.00288	0.00277	0.00263	0.00251	0.00241	0.00235
10	5	0.00206	0.00195	0.00190	0.00174	0.00172	0.00167	0.00152	0.00146
15	5	0.00289	0.00304	0.00267	0.00264	0.00255	0.00241	0.00233	0.00231
20	5	0.00468	0.00415	0.00408	0.00397	0.00415	0.00407	0.00312	0.00306
25	5	0.00397	0.00391	0.00373	0.00351	0.00311	0.00262	0.00288	0.00284
30	5	0.00411	0.00286	0.00346	0.00377	0.00320	0.00265	0.00317	0.00311
35	5	0.00495	0.00613	0.00435	0.00459	0.00523	0.00575	0.00302	0.00351
40	5	0.00688	0.00672	0.00654	0.00635	0.00621	0.00597	0.00573	0.00564
45	5	0.00898	0.00882	0.00862	0.00843	0.00827	0.00801	0.00775	0.00764
50	5	0.01257	0.01242	0.01217	0.01195	0.01177	0.01148	0.01117	0.01104
55	5	0.01794	0.01781	0.01749	0.01724	0.01704	0.01671	0.01639	0.01620

60	5	0.02755	0.02736	0.02695	0.02663	0.02635	0.02595	0.02560	0.02533
65	5	0.04238	0.04203	0.04155	0.04111	0.04070	0.04023	0.03965	0.03943
70	5	0.06838	0.06790	0.06722	0.06663	0.06605	0.06548	0.06475	0.06449
75	5	0.10722	0.10686	0.10583	0.10521	0.10441	0.10384	0.10289	0.10254
80	5	0.16287	0.16220	0.16111	0.16057	0.15963	0.15914	0.15839	0.15781
85	5	0.23909	0.23883	0.23716	0.23661	0.23538	0.23542	0.23430	0.23398
90	5	0.32753	0.32746	0.32575	0.32505	0.32295	0.32419	0.32381	0.32316

x	n	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
0	1	0.08762	0.08501	0.08249	0.07986	0.07700	0.07340	0.07182	0.06935
1	4	0.00882	0.00811	0.00768	0.00726	0.00689	0.00658	0.00648	0.00586
5	5	0.00221	0.00208	0.00199	0.00188	0.00180	0.00176	0.00171	0.00162
10	5	0.00138	0.00135	0.00133	0.00125	0.00120	0.00119	0.00117	0.00113
15	5	0.00222	0.00209	0.00203	0.00196	0.00192	0.00189	0.00188	0.00180
20	5	0.00292	0.00270	0.00276	0.00239	0.00206	0.00213	0.00203	0.00204
25	5	0.00246	0.00241	0.00222	0.00252	0.00246	0.00247	0.00251	0.00231
30	5	0.00283	0.00293	0.00288	0.00277	0.00276	0.00272	0.00268	0.00240
35	5	0.00403	0.00352	0.00336	0.00285	0.00287	0.00297	0.00313	0.00338
40	5	0.00539	0.00523	0.00510	0.00490	0.00480	0.00481	0.00483	0.00469
45	5	0.00736	0.00718	0.00704	0.00680	0.00670	0.00672	0.00676	0.00660
50	5	0.01071	0.01050	0.01031	0.01002	0.00991	0.00993	0.01000	0.00982
55	5	0.01580	0.01556	0.01532	0.01497	0.01482	0.01486	0.01495	0.01472
60	5	0.02483	0.02454	0.02424	0.02385	0.02359	0.02363	0.02373	0.02342

65	5	0.03879	0.03840	0.03801	0.03745	0.03721	0.03726	0.03741	0.03703
70	5	0.06368	0.06317	0.06262	0.06186	0.06148	0.06143	0.06149	0.06095
75	5	0.10154	0.10087	0.10012	0.09919	0.09869	0.09851	0.09846	0.09778
80	5	0.15684	0.15607	0.15516	0.15406	0.15337	0.15301	0.15274	0.15197
85	5	0.23325	0.23271	0.23168	0.23118	0.23022	0.22996	0.22952	0.22900
90	5	0.32256	0.32234	0.32179	0.32142	0.32117	0.32139	0.32125	0.32145

x	n	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
0	1	0.06571	0.06388	0.06126	0.05787	0.05535	0.05375	0.05100	0.04871
1	4	0.00542	0.00532	0.00477	0.00444	0.00433	0.00404	0.00356	0.00345
5	5	0.00154	0.00148	0.00139	0.00131	0.00126	0.00121	0.00118	0.00112
10	5	0.00109	0.00106	0.00101	0.00095	0.00094	0.00090	0.00089	0.00086
15	5	0.00172	0.00169	0.00161	0.00155	0.00155	0.00151	0.00153	0.00148
20	5	0.00196	0.00188	0.00179	0.00183	0.00177	0.00176	0.00173	0.00179
25	5	0.00224	0.00223	0.00196	0.00185	0.00181	0.00178	0.00194	0.00172
30	5	0.00249	0.00252	0.00223	0.00221	0.00206	0.00214	0.00235	0.00214
35	5	0.00322	0.00307	0.00311	0.00271	0.00288	0.00298	0.00297	0.00300
40	5	0.00458	0.00453	0.00434	0.00422	0.00423	0.00415	0.00423	0.00414
45	5	0.00647	0.00641	0.00619	0.00606	0.00607	0.00599	0.00611	0.00601
50	5	0.00965	0.00959	0.00931	0.00917	0.00918	0.00909	0.00923	0.00911
55	5	0.01449	0.01442	0.01406	0.01389	0.01391	0.01378	0.01397	0.01381
60	5	0.02307	0.02294	0.02244	0.02219	0.02217	0.02198	0.02218	0.02196

65	5	0.03656	0.03640	0.03572	0.03538	0.03531	0.03500	0.03520	0.03491
70	5	0.06021	0.05994	0.05900	0.05852	0.05835	0.05791	0.05799	0.05748
75	5	0.09668	0.09629	0.09501	0.09432	0.09399	0.09335	0.09321	0.09256
80	5	0.15056	0.15015	0.14869	0.14791	0.14739	0.14653	0.14601	0.14518
85	5	0.22734	0.22693	0.22556	0.22483	0.22409	0.22320	0.22222	0.22145
90	5	0.32089	0.32059	0.32038	0.32019	0.31955	0.31883	0.31717	0.31682

x	n	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
0	1	0.04641	0.04410	0.04245	0.04067	0.03865	0.03754	0.03824	0.03449
1	4	0.00325	0.00308	0.00297	0.00273	0.00256	0.00249	0.00334	0.00208
5	5	0.00109	0.00104	0.00101	0.00096	0.00091	0.00087	0.00163	0.00084
10	5	0.00084	0.00081	0.00081	0.00078	0.00075	0.00072	0.00124	0.00071
15	5	0.00147	0.00144	0.00145	0.00140	0.00136	0.00132	0.00181	0.00133
20	5	0.00173	0.00175	0.00174	0.00174	0.00175	0.00181	0.00221	0.00185
25	5	0.00187	0.00162	0.00171	0.00165	0.00148	0.00127	0.00214	0.00152
30	5	0.00209	0.00215	0.00217	0.00207	0.00183	0.00167	0.00248	0.00182
35	5	0.00299	0.00309	0.00317	0.00317	0.00331	0.00343	0.00390	0.00329
40	5	0.00414	0.00412	0.00411	0.00404	0.00394	0.00389	0.00454	0.00394
45	5	0.00601	0.00601	0.00600	0.00593	0.00580	0.00574	0.00649	0.00582
50	5	0.00912	0.00912	0.00912	0.00903	0.00887	0.00882	0.00969	0.00892
55	5	0.01382	0.01381	0.01379	0.01367	0.01344	0.01336	0.01434	0.01349
60	5	0.02193	0.02190	0.02183	0.02165	0.02128	0.02114	0.02220	0.02120
65	5	0.03479	0.03470	0.03472	0.03446	0.03375	0.03352	0.03470	0.03359

70	5	0.05724	0.05693	0.05663	0.05616	0.05541	0.05498	0.05618	0.05496
75	5	0.09214	0.09160	0.09118	0.09040	0.08924	0.08855	0.08951	0.08772
80	5	0.14446	0.14355	0.14298	0.14188	0.14039	0.13944	0.14012	0.13818
85	5	0.22055	0.21924	0.21858	0.21722	0.21529	0.21407	0.21444	0.21232
90	5	0.31587	0.31419	0.31386	0.31272	0.31066	0.30973	0.31034	0.30801

x	n	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
0	1	0.03350	0.03184	0.02998	0.02888	0.02793	0.02707	0.02613	0.02501
1	4	0.00203	0.00181	0.00178	0.00184	0.00174	0.00161	0.00148	0.00139
5	5	0.00081	0.00077	0.00076	0.00073	0.00071	0.00069	0.00067	0.00063
10	5	0.00069	0.00066	0.00065	0.00063	0.00062	0.00060	0.00059	0.00056
15	5	0.00130	0.00127	0.00129	0.00126	0.00125	0.00124	0.00123	0.00119
20	5	0.00170	0.00201	0.00210	0.00225	0.00188	0.00169	0.00193	0.00200
25	5	0.00149	0.00130	0.00149	0.00132	0.00141	0.00144	0.00152	0.00147
30	5	0.00183	0.00159	0.00186	0.00159	0.00166	0.00174	0.00168	0.00146
35	5	0.00321	0.00346	0.00335	0.00333	0.00332	0.00334	0.00352	0.00343
40	5	0.00386	0.00379	0.00385	0.00379	0.00377	0.00376	0.00377	0.00367
45	5	0.00574	0.00567	0.00576	0.00569	0.00565	0.00564	0.00561	0.00550
50	5	0.00883	0.00874	0.00885	0.00876	0.00871	0.00870	0.00868	0.00855
55	5	0.01336	0.01325	0.01340	0.01328	0.01319	0.01318	0.01315	0.01297
60	5	0.02097	0.02078	0.02092	0.02074	0.02061	0.02060	0.02056	0.02034
65	5	0.03323	0.03282	0.03290	0.03254	0.03220	0.03205	0.03192	0.03150

70	5	0.05443	0.05363	0.05358	0.05301	0.05266	0.05233	0.05180	0.05113
75	5	0.08686	0.08615	0.08586	0.08498	0.08463	0.08411	0.08302	0.08208
80	5	0.13688	0.13574	0.13516	0.13370	0.13259	0.13173	0.13085	0.12965
85	5	0.21059	0.20926	0.20839	0.20653	0.20533	0.20412	0.20278	0.20144
90	5	0.30599	0.30452	0.30344	0.30128	0.30027	0.29905	0.29796	0.29683

x	n	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
0	1	0.02402	0.02321	0.02246	0.02161	0.02066	0.02004	0.01950	0.01887
1	4	0.00135	0.00129	0.00121	0.00113	0.00111	0.00110	0.00103	0.00096
5	5	0.00061	0.00059	0.00058	0.00057	0.00055	0.00052	0.00051	0.00050
10	5	0.00054	0.00053	0.00052	0.00052	0.00050	0.00048	0.00048	0.00048
15	5	0.00116	0.00115	0.00115	0.00114	0.00108	0.00106	0.00105	0.00117
20	5	0.00203	0.00163	0.00141	0.00150	0.00141	0.00139	0.00138	0.00153
25	5	0.00140	0.00121	0.00120	0.00126	0.00104	0.00095	0.00133	0.00173
30	5	0.00142	0.00145	0.00155	0.00168	0.00150	0.00133	0.00191	0.00233
35	5	0.00318	0.00324	0.00310	0.00324	0.00300	0.00317	0.00311	0.00340
40	5	0.00359	0.00358	0.00359	0.00356	0.00339	0.00336	0.00378	0.00424
45	5	0.00540	0.00538	0.00539	0.00540	0.00518	0.00514	0.00593	0.00673
50	5	0.00841	0.00838	0.00837	0.00833	0.00804	0.00798	0.00947	0.01074
55	5	0.01277	0.01272	0.01272	0.01268	0.01229	0.01222	0.01486	0.01679
60	5	0.02006	0.01993	0.01991	0.01981	0.01928	0.01916	0.02379	0.02692
65	5	0.03109	0.03127	0.03114	0.03099	0.03031	0.03009	0.03759	0.04236

70	5	0.05045	0.04986	0.04968	0.04946	0.04856	0.04814	0.05857	0.06596
75	5	0.08107	0.08039	0.08011	0.07923	0.07803	0.07722	0.09106	0.10212
80	5	0.12829	0.12757	0.12721	0.12548	0.12402	0.12282	0.14411	0.16034
85	5	0.19974	0.19803	0.19721	0.19604	0.19433	0.19292	0.22645	0.24919
90	5	0.29582	0.29475	0.29300	0.29202	0.29016	0.28899	0.33948	0.36748

Lampiran 5. Data Estimasi ${}_n\hat{q}_{x,t}$ Penduduk Indonesia

x	n	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
0	1	0.19569	0.19357	0.18808	0.18326	0.17937	0.17348	0.16917	0.16524
1	4	0.14512	0.14253	0.13526	0.12950	0.12373	0.11685	0.11276	0.10727
5	5	0.04289	0.04228	0.03978	0.03824	0.03647	0.03646	0.03321	0.03153
10	5	0.02380	0.02338	0.02271	0.02183	0.02103	0.02030	0.01933	0.01900
15	5	0.03122	0.03069	0.02943	0.02880	0.02782	0.02771	0.02655	0.02542
20	5	0.03081	0.05186	0.04991	0.04562	0.04400	0.05030	0.04221	0.03975
25	5	0.04674	0.04892	0.04567	0.04850	0.04425	0.02227	0.03930	0.03750
30	5	0.04770	0.04869	0.04640	0.04640	0.04397	0.04352	0.03861	0.03996
35	5	0.05350	0.05273	0.05095	0.04995	0.04856	0.04792	0.04439	0.04380
40	5	0.06099	0.06001	0.05879	0.05763	0.05616	0.05500	0.05321	0.05229
45	5	0.06879	0.06796	0.06692	0.06594	0.06468	0.06383	0.06215	0.06134
50	5	0.08490	0.08451	0.08352	0.08269	0.08159	0.08086	0.07914	0.07840
55	5	0.10988	0.10951	0.10833	0.10756	0.10660	0.10610	0.10470	0.10395
60	5	0.15678	0.15651	0.15474	0.15406	0.15316	0.15148	0.14972	0.14865
65	5	0.21844	0.21816	0.21776	0.21814	0.21745	0.21714	0.21507	0.21449
70	5	0.31792	0.31691	0.31566	0.31548	0.31619	0.31614	0.31372	0.31288
75	5	0.43926	0.43819	0.43619	0.43558	0.43695	0.43957	0.43638	0.43557
80	5	0.57498	0.57529	0.57336	0.57275	0.57336	0.57504	0.57232	0.57182
85	5	0.70648	0.70699	0.70564	0.70543	0.70582	0.70888	0.70829	0.70864
90	5	0.80946	0.81037	0.80993	0.80992	0.81065	0.81030	0.81046	0.81141

x	n	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
0	1	0.16070	0.15638	0.15176	0.14855	0.14562	0.14194	0.13759	0.14577
1	4	0.10180	0.09757	0.09374	0.09077	0.08640	0.08216	0.07872	0.09946
5	5	0.03025	0.02920	0.02414	0.02705	0.02625	0.02544	0.02398	0.03254
10	5	0.01826	0.01767	0.01803	0.01688	0.01632	0.01576	0.01483	0.02728
15	5	0.02526	0.02415	0.02315	0.02229	0.02147	0.02101	0.02004	0.03053
20	5	0.04368	0.03778	0.04779	0.03785	0.03389	0.03179	0.02576	0.07437
25	5	0.03628	0.03254	0.03924	0.03058	0.02954	0.02965	0.03243	0.02944
30	5	0.03784	0.04089	0.01947	0.03196	0.03036	0.02991	0.03004	0.03028
35	5	0.04269	0.04184	0.03843	0.03741	0.03478	0.03249	0.02868	0.10522
40	5	0.05212	0.05033	0.04965	0.04813	0.04648	0.04565	0.04403	0.06597
45	5	0.06122	0.05961	0.05894	0.05753	0.05601	0.05524	0.05366	0.07723
50	5	0.07821	0.07667	0.07623	0.07469	0.07313	0.07247	0.07085	0.09756
55	5	0.10376	0.10234	0.10201	0.10032	0.09872	0.09806	0.09629	0.12732
60	5	0.14828	0.14699	0.14699	0.14566	0.14389	0.14327	0.14119	0.17860
65	5	0.21341	0.21198	0.21128	0.20926	0.20768	0.20647	0.20446	0.25035
70	5	0.31188	0.31052	0.31010	0.30794	0.30623	0.30572	0.30220	0.35662
75	5	0.43509	0.43347	0.43329	0.43181	0.42999	0.42971	0.42571	0.48087
80	5	0.57189	0.56992	0.57289	0.57131	0.56989	0.57003	0.56620	0.60869
85	5	0.70903	0.70701	0.70916	0.70813	0.70740	0.70758	0.70514	0.72643
90	5	0.81161	0.81172	0.81547	0.81562	0.81587	0.81568	0.81560	0.80872

x	n	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------

0	1	0.13250	0.12839	0.12452	0.12007	0.11710	0.11462	0.11054	0.10679
1	4	0.07773	0.06955	0.06548	0.06257	0.06059	0.05717	0.05359	0.05182
5	5	0.02758	0.02102	0.02037	0.01938	0.01853	0.01753	0.01694	0.01618
10	5	0.01957	0.01329	0.01280	0.01235	0.01253	0.01142	0.01108	0.01063
15	5	0.02461	0.01856	0.01803	0.01724	0.01425	0.01599	0.01537	0.01484
20	5	0.04411	0.02677	0.02968	0.03022	0.02714	0.02629	0.02572	0.02451
25	5	0.03657	0.02697	0.02245	0.02037	0.01440	0.01721	0.01997	0.01992
30	5	0.03215	0.02584	0.02177	0.01942	0.02646	0.01866	0.01907	0.01946
35	5	0.03385	0.02582	0.02919	0.02820	0.03182	0.02881	0.02635	0.02444
40	5	0.04966	0.04095	0.04011	0.03885	0.03779	0.03691	0.03564	0.03469
45	5	0.05908	0.05087	0.05014	0.04890	0.04801	0.04704	0.04575	0.04480
50	5	0.07616	0.06808	0.06733	0.06603	0.06527	0.06419	0.06280	0.06184
55	5	0.10140	0.09342	0.09275	0.09139	0.09051	0.08940	0.08788	0.08680
60	5	0.14563	0.13765	0.13679	0.13516	0.13443	0.13293	0.13101	0.12984
65	5	0.20954	0.20120	0.20055	0.19867	0.19744	0.19625	0.19392	0.19236
70	5	0.30841	0.29930	0.29878	0.29699	0.29638	0.29477	0.29293	0.29133
75	5	0.43266	0.42367	0.42307	0.42171	0.42082	0.41942	0.41827	0.41701
80	5	0.57289	0.56526	0.56387	0.56310	0.56310	0.56095	0.55986	0.55867
85	5	0.71172	0.70696	0.70534	0.70371	0.70373	0.70164	0.69981	0.69795
90	5	0.81795	0.81627	0.81468	0.81146	0.81339	0.81051	0.80793	0.80598

x	n	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
0	1	0.10436	0.10121	0.09788	0.09557	0.09406	0.09091	0.08746	0.08528

1	4	0.04986	0.04678	0.04477	0.04322	0.04074	0.03795	0.03696	0.03649
5	5	0.01539	0.01498	0.01430	0.01377	0.01308	0.01245	0.01198	0.01167
10	5	0.01026	0.00968	0.00945	0.00865	0.00859	0.00831	0.00756	0.00728
15	5	0.01435	0.01509	0.01327	0.01310	0.01265	0.01198	0.01160	0.01147
20	5	0.02315	0.02055	0.02021	0.01966	0.02055	0.02016	0.01547	0.01519
25	5	0.01965	0.01937	0.01846	0.01742	0.01541	0.01302	0.01431	0.01408
30	5	0.02034	0.01422	0.01714	0.01866	0.01585	0.01314	0.01575	0.01542
35	5	0.02446	0.03019	0.02151	0.02270	0.02583	0.02832	0.01497	0.01741
40	5	0.03381	0.03302	0.03218	0.03127	0.03058	0.02940	0.02827	0.02779
45	5	0.04392	0.04312	0.04221	0.04126	0.04052	0.03926	0.03801	0.03749
50	5	0.06089	0.06022	0.05902	0.05801	0.05717	0.05578	0.05434	0.05372
55	5	0.08577	0.08521	0.08371	0.08259	0.08166	0.08014	0.07869	0.07779
60	5	0.12868	0.12786	0.12605	0.12468	0.12343	0.12167	0.12013	0.11895
65	5	0.19094	0.18954	0.18758	0.18579	0.18415	0.18219	0.17983	0.17891
70	5	0.28957	0.28789	0.28545	0.28334	0.28125	0.27921	0.27657	0.27563
75	5	0.41496	0.41391	0.41091	0.40906	0.40669	0.40499	0.40218	0.40112
80	5	0.55706	0.55559	0.55316	0.55194	0.54985	0.54874	0.54704	0.54573
85	5	0.69743	0.69704	0.69449	0.69365	0.69177	0.69183	0.69010	0.68960
90	5	0.80556	0.80550	0.80383	0.80313	0.80105	0.80229	0.80192	0.80127

x	n	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
0	1	0.08389	0.08150	0.07918	0.07676	0.07411	0.07077	0.06930	0.06700
1	4	0.03466	0.03191	0.03026	0.02863	0.02718	0.02598	0.02558	0.02315

5	5	0.01100	0.01035	0.00991	0.00935	0.00896	0.00876	0.00852	0.00807
10	5	0.00690	0.00675	0.00660	0.00623	0.00598	0.00593	0.00585	0.00564
15	5	0.01104	0.01042	0.01011	0.00974	0.00957	0.00941	0.00934	0.00898
20	5	0.01451	0.01341	0.01368	0.01187	0.01026	0.01058	0.01008	0.01016
25	5	0.01223	0.01199	0.01105	0.01253	0.01221	0.01227	0.01247	0.01150
30	5	0.01403	0.01455	0.01432	0.01374	0.01369	0.01353	0.01330	0.01194
35	5	0.01997	0.01743	0.01665	0.01413	0.01423	0.01472	0.01555	0.01678
40	5	0.02660	0.02579	0.02518	0.02419	0.02371	0.02376	0.02385	0.02320
45	5	0.03615	0.03528	0.03457	0.03344	0.03294	0.03302	0.03322	0.03249
50	5	0.05213	0.05113	0.05024	0.04889	0.04832	0.04846	0.04878	0.04793
55	5	0.07597	0.07483	0.07375	0.07212	0.07144	0.07159	0.07201	0.07096
60	5	0.11677	0.11546	0.11414	0.11241	0.11127	0.11142	0.11189	0.11051
65	5	0.17631	0.17469	0.17310	0.17076	0.16978	0.16998	0.17060	0.16902
70	5	0.27270	0.27081	0.26883	0.26603	0.26465	0.26446	0.26470	0.26269
75	5	0.39813	0.39610	0.39382	0.39099	0.38947	0.38894	0.38879	0.38669
80	5	0.54351	0.54176	0.53967	0.53713	0.53554	0.53469	0.53407	0.53226
85	5	0.68846	0.68763	0.68600	0.68522	0.68372	0.68331	0.68261	0.68177
90	5	0.80067	0.80045	0.79990	0.79954	0.79928	0.79950	0.79936	0.79956

x	n	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
0	1	0.06360	0.06188	0.05942	0.05623	0.05385	0.05233	0.04972	0.04755
1	4	0.02146	0.02107	0.01889	0.01759	0.01716	0.01604	0.01415	0.01370
5	5	0.00765	0.00737	0.00694	0.00650	0.00630	0.00602	0.00589	0.00560

10	5	0.00543	0.00529	0.00504	0.00473	0.00468	0.00448	0.00446	0.00428
15	5	0.00857	0.00839	0.00801	0.00772	0.00771	0.00750	0.00760	0.00735
20	5	0.00977	0.00934	0.00893	0.00913	0.00881	0.00875	0.00861	0.00891
25	5	0.01113	0.01111	0.00975	0.00922	0.00902	0.00886	0.00965	0.00856
30	5	0.01240	0.01253	0.01107	0.01097	0.01027	0.01066	0.01169	0.01065
35	5	0.01599	0.01522	0.01543	0.01346	0.01429	0.01477	0.01474	0.01491
40	5	0.02264	0.02239	0.02146	0.02090	0.02091	0.02054	0.02095	0.02049
45	5	0.03182	0.03155	0.03047	0.02984	0.02991	0.02952	0.03007	0.02958
50	5	0.04712	0.04683	0.04550	0.04480	0.04488	0.04441	0.04511	0.04452
55	5	0.06990	0.06955	0.06790	0.06708	0.06717	0.06660	0.06745	0.06672
60	5	0.10896	0.10837	0.10615	0.10503	0.10494	0.10409	0.10498	0.10398
65	5	0.16708	0.16641	0.16356	0.16215	0.16182	0.16056	0.16137	0.16016
70	5	0.25996	0.25898	0.25547	0.25366	0.25303	0.25140	0.25169	0.24980
75	5	0.38331	0.38210	0.37815	0.37601	0.37496	0.37295	0.37252	0.37048
80	5	0.52896	0.52799	0.52453	0.52268	0.52144	0.51937	0.51811	0.51610
85	5	0.67913	0.67847	0.67626	0.67507	0.67387	0.67241	0.67081	0.66953
90	5	0.79900	0.79870	0.79849	0.79830	0.79764	0.79692	0.79523	0.79487

x	n	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
0	1	0.04535	0.04315	0.04156	0.03985	0.03791	0.03684	0.03751	0.03391
1	4	0.01291	0.01225	0.01180	0.01087	0.01017	0.00990	0.01326	0.00827
5	5	0.00543	0.00521	0.00503	0.00477	0.00456	0.00433	0.00813	0.00417
10	5	0.00421	0.00406	0.00402	0.00387	0.00374	0.00358	0.00619	0.00353

15	5	0.00734	0.00719	0.00720	0.00697	0.00680	0.00660	0.00903	0.00664
20	5	0.00863	0.00873	0.00864	0.00865	0.00870	0.00899	0.01097	0.00919
25	5	0.00931	0.00805	0.00851	0.00821	0.00738	0.00633	0.01064	0.00756
30	5	0.01039	0.01068	0.01081	0.01030	0.00912	0.00833	0.01232	0.00907
35	5	0.01485	0.01531	0.01574	0.01574	0.01643	0.01699	0.01931	0.01632
40	5	0.02048	0.02040	0.02036	0.02002	0.01953	0.01927	0.02242	0.01951
45	5	0.02962	0.02960	0.02955	0.02920	0.02859	0.02831	0.03193	0.02870
50	5	0.04456	0.04459	0.04456	0.04417	0.04338	0.04312	0.04731	0.04363
55	5	0.06675	0.06674	0.06663	0.06609	0.06500	0.06461	0.06919	0.06522
60	5	0.10385	0.10370	0.10342	0.10259	0.10095	0.10030	0.10505	0.10057
65	5	0.15966	0.15929	0.15937	0.15828	0.15530	0.15432	0.15929	0.15459
70	5	0.24890	0.24774	0.24660	0.24481	0.24200	0.24035	0.24491	0.24028
75	5	0.36916	0.36745	0.36614	0.36365	0.35995	0.35775	0.36082	0.35505
80	5	0.51437	0.51215	0.51075	0.50805	0.50439	0.50202	0.50371	0.49888
85	5	0.66805	0.66587	0.66476	0.66246	0.65920	0.65712	0.65774	0.65410
90	5	0.79389	0.79215	0.79181	0.79062	0.78845	0.78746	0.78811	0.78563

x	n	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
0	1	0.03295	0.03134	0.02953	0.02847	0.02754	0.02671	0.02579	0.02470
1	4	0.00808	0.00722	0.00709	0.00734	0.00694	0.00642	0.00589	0.00554
5	5	0.00406	0.00384	0.00378	0.00362	0.00353	0.00342	0.00335	0.00317
10	5	0.00345	0.00328	0.00326	0.00312	0.00307	0.00301	0.00294	0.00278
15	5	0.00647	0.00633	0.00642	0.00629	0.00622	0.00619	0.00615	0.00591

20	5	0.00847	0.01002	0.01046	0.01117	0.00937	0.00840	0.00958	0.00996
25	5	0.00742	0.00647	0.00743	0.00655	0.00704	0.00718	0.00758	0.00730
30	5	0.00909	0.00792	0.00926	0.00790	0.00829	0.00867	0.00835	0.00728
35	5	0.01592	0.01715	0.01663	0.01650	0.01646	0.01655	0.01744	0.01700
40	5	0.01913	0.01879	0.01909	0.01878	0.01866	0.01864	0.01866	0.01819
45	5	0.02831	0.02797	0.02839	0.02805	0.02787	0.02780	0.02767	0.02715
50	5	0.04319	0.04276	0.04330	0.04286	0.04260	0.04257	0.04249	0.04183
55	5	0.06464	0.06410	0.06480	0.06422	0.06381	0.06377	0.06364	0.06281
60	5	0.09956	0.09868	0.09933	0.09848	0.09793	0.09786	0.09769	0.09671
65	5	0.15308	0.15133	0.15169	0.15017	0.14871	0.14806	0.14750	0.14572
70	5	0.23825	0.23521	0.23501	0.23282	0.23149	0.23020	0.22819	0.22560
75	5	0.35228	0.34998	0.34905	0.34615	0.34502	0.34330	0.33972	0.33663
80	5	0.49562	0.49273	0.49126	0.48753	0.48468	0.48245	0.48017	0.47704
85	5	0.65110	0.64877	0.64724	0.64393	0.64180	0.63961	0.63719	0.63476
90	5	0.78345	0.78186	0.78067	0.77830	0.77717	0.77581	0.77459	0.77330

x	n	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
0	1	0.02374	0.02295	0.02221	0.02138	0.02045	0.01984	0.01931	0.01869
1	4	0.00540	0.00516	0.00483	0.00450	0.00445	0.00441	0.00412	0.00383
5	5	0.00305	0.00295	0.00290	0.00284	0.00275	0.00260	0.00254	0.00249
10	5	0.00272	0.00266	0.00262	0.00260	0.00251	0.00241	0.00239	0.00239
15	5	0.00580	0.00575	0.00574	0.00570	0.00541	0.00530	0.00525	0.00582
20	5	0.01009	0.00811	0.00702	0.00746	0.00704	0.00694	0.00686	0.00763

25	5	0.00697	0.00601	0.00599	0.00630	0.00517	0.00476	0.00665	0.00863
30	5	0.00708	0.00721	0.00773	0.00835	0.00749	0.00660	0.00950	0.01157
35	5	0.01575	0.01606	0.01537	0.01608	0.01488	0.01571	0.01544	0.01685
40	5	0.01781	0.01776	0.01780	0.01765	0.01681	0.01667	0.01873	0.02099
45	5	0.02664	0.02656	0.02661	0.02664	0.02555	0.02538	0.02920	0.03311
50	5	0.04115	0.04102	0.04099	0.04078	0.03938	0.03913	0.04627	0.05228
55	5	0.06186	0.06162	0.06163	0.06142	0.05959	0.05927	0.07162	0.08054
60	5	0.09542	0.09486	0.09477	0.09431	0.09191	0.09136	0.11214	0.12594
65	5	0.14397	0.14472	0.14418	0.14353	0.14062	0.13970	0.17134	0.19087
70	5	0.22293	0.22067	0.21996	0.21910	0.21555	0.21391	0.25388	0.28095
75	5	0.33324	0.33099	0.33006	0.32711	0.32303	0.32030	0.36575	0.39987
80	5	0.47348	0.47157	0.47062	0.46601	0.46210	0.45888	0.51352	0.55144
85	5	0.63163	0.62848	0.62695	0.62476	0.62153	0.61886	0.67769	0.71234
90	5	0.77216	0.77094	0.76892	0.76778	0.76561	0.76424	0.81684	0.84077