



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**PENENTUAN HARGA *LIFE SETTLEMENT* DENGAN METODE *FUZZY***

**SKRIPSI**

**PETER ALEXANDER WANDOJO**

**2106702812**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**PROGRAM STUDI SARJANA ILMU AKTUARIA**

**DEPOK**

**JANUARI 2025**



**UNIVERSITAS INDONESIA**

**PENENTUAN HARGA *LIFE SETTLEMENT* DENGAN METODE *FUZZY***

**SKRIPSI**

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana**

**PETER ALEXANDER WANDOJO**

**2106702812**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**PROGRAM STUDI SARJANA ILMU AKTUARIA**

**DEPOK**


**JANUARI 2025**

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,  
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk  
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Peter Alexander Wandojo

NPM : 2106702812

Tanda Tangan : 

Tanggal : 23 Desember 2024

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :  
Nama : Peter Alexander Wandojo  
NPM : 2106702812  
Program Studi : Sarjana Ilmu Aktuaria  
Judul Skripsi : Penentuan Harga *Life Settlement* dengan Metode *Fuzzy*

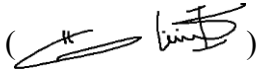
Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Sarjana Ilmu Aktuaria, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

### DEWAN PENGUJI

Pembimbing I : Sindy Devila, S.Si., M.Si.

(  )

Pembimbing II : Gianinna Ardaneswari, S.Si., M.Si.

(  )

Penguji I : Prof. Dr.rer.nat. Hendri Murfi, S.Si., M.Kom.

(  )

Penguji II : Dr. Suci Fratama Sari, S.Si., M.Si.

(  )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 30 Desember 2024

## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat dan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan sebaik-baiknya. Selama masa penulisan skripsi ini, penulis telah mendapat banyak dukungan, doa, bantuan, inspirasi, dan motivasi dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis ingin berterima kasih kepada:

1. Ibu Sindy Devila, M.Si. selaku dosen pembimbing I. Terima kasih atas ilmu, waktu, tenaga, arahan, kesabaran, dan motivasi yang telah Ibu berikan selama perkuliahan, terutama selama proses bimbingan penulisan skripsi ini.
2. Ibu Gianinna Ardaneswari, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu untuk membimbing saya dalam menyusun skripsi ini. Terima kasih atas kritik, ide, dan masukan yang telah Ibu berikan selama proses bimbingan penulisan skripsi ini.
3. Prof. Dr.rer.nat. Hendri Murfi, S.Si., M.Kom. selaku pembimbing akademis penulis dan dosen penguji I. Terima kasih atas bimbingan akademisnya selama penulis berkuliah serta waktu yang diluangkan untuk hadir dalam sidang skripsi serta sarannya terkait penulisan skripsi ini.
4. Ibu Dr. Suci Fratama Sari, S.Si, M.Si. selaku Ketua Program Studi Sarjana Ilmu Aktuaria dan dosen penguji II sidang skripsi penulis. Terima kasih karena telah bersedia meluangkan waktu untuk hadir dalam sidang skripsi ini dan memberikan saran terkait penulisan skripsi ini.
5. Para dosen, asisten dosen, dan asisten laboratorium Departemen Matematika FMIPA UI atas semua ilmu pengetahuan yang telah diberikan kepada penulis selama masa kuliah.
6. Para staf Departemen Matematika dan staf FMIPA UI atas bantuannya sehingga penulis dapat menjalani perkuliahan dengan lancar.
7. Keluarga penulis yang telah memberi dukungan dalam berbagai bentuk selama perkuliahan dan penulisan skripsi penulis.
8. Kak Sandy dan Charissya selaku keluarga asuh penulis di Departemen Matematika FMIPA UI. Terima kasih atas dukungan yang telah diberikan, saran, arahan, dan motivasi akademis yang diberikan kepada penulis, serta telah menjadi tempat penulis mencurahkan keluh kesah selama perkuliahan dan penulisan skripsi.

9. Kakak-kakak dan teman-teman fungsionaris Biro Variansi HMD Matematika FMIPA UI periode 2021, 2022, dan 2023. Terima kasih karena telah menjadi tempat penulis bertumbuh dan berkembang dari segi personal maupun organisasi, serta telah memberikan banyak warna pada hari-hari penulis di masa kuliah.
10. Teman-teman *Smurfies*, Oxy, Andreas, CJ, Samuel, Calvin, Enrico, Tobias, Tricia, Farren, Amelia, Kyla, Githa, Georgia, Devi, Celinne, Callista, dan Maurine. Terima kasih karena telah menjadi teman belajar bersama dan menjadi teman-teman pertama penulis selama berkuliah di Departemen Matematika FMIPA UI.
11. Teman-teman seperbimbingan tugas akhir, Farren, Samuel, Tobias, Celinne, Adi, Aloysius, dan Kak Rico. Terima kasih karena telah menemani penulis selama proses penulisan proposal hingga penyelesaian skripsi.
12. Teman-teman program studi Sarjana Ilmu Aktuaria angkatan 2021, terutama Jerry, Andrew, Gladwin, Viriya, dan Taffa. Terima kasih karena telah menjadi teman bermain dan teman belajar bersama selama masa perkuliahan.
13. Teman-teman *Discord Unmei*, terutama Ridhwan, Ahong, Bisma, Taffa, Farisan, Raffi, dan lainnya. Terima kasih karena telah menjadi teman bergaul secara daring mengenai Departemen Matematika FMIPA UI.
14. Kakak-kakak angkatan 2019, 2020, serta teman-teman angkatan 2021, 2022, dan 2023 Departemen Matematika FMIPA UI yang telah menjadi teman bercerita, telah mendukung, membantu, serta memberikan inspirasi kepada penulis selama masa perkuliahan dan penulisan skripsi.
15. Teman-teman SMAK 3 BPK Penabur Jakarta yang masih sering berhubungan selama masa perkuliahan penulis, terutama Victori, SEAF, Justin, Jeannette, Darren, Cilla, Prisca, dan Francis. Terima kasih karena masih menyempatkan waktu untuk bertemu dan berbincang meskipun sudah berkuliah di tempat yang berbeda-beda.
16. Kakak-kakak dan teman-teman magang penulis di PT Prudential Life Assurance, Kak Bernard, Kak Christina, Kak Harits, Kak Elma, Kak Debby, Kak Christie, Kak Ana, Kak Natan, Kak Odelia, Kak Josa, Kak Aurellia, Kak Ivan, Kak Sandra, Kak Rusni, Kak Alfina, Kak Grace, Kak Krishna, Githa, Amelia, Jessie, dan Jerry. Terima kasih banyak atas eksposur dan ilmu-ilmunya mengenai industri asuransi serta telah mendampingi penulis selama proses penulisan skripsi.

17. Pihak-pihak lain yang telah membantu penulis baik dalam masa perkuliahan di Departemen Matematika FMIPA UI maupun selama masa penulisan skripsi, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Demikianlah skripsi ini penulis susun dengan segala keterbatasan. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis memohon maaf atas segala kekurangan dan kesalahan yang mungkin terdapat dalam penulisan skripsi ini. Penulis sangat terbuka terhadap kritik dan saran yang membangun mengenai skripsi ini. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan memberikan sumbangsih dalam pengembangan ilmu pengetahuan.

Peter Alexander Wandojo

2024

## HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Peter Alexander Wandojo  
NPM : 2106702812  
Program Studi : Sarjana Ilmu Aktuaria  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Penentuan Harga *Life Settlement* dengan Metode *Fuzzy*

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini, Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*data base*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok  
Pada tanggal : 23 Desember 2024

Yang menyatakan



(Peter Alexander Wandojo)

## ABSTRAK

Nama : Peter Alexander Wandojo  
Program Studi : Sarjana Ilmu Aktuaria  
Judul : Penentuan Harga *Life Settlement* dengan Metode *Fuzzy*

Asuransi jiwa memberikan penggantian kepada pemegang polis jika terjadi kejadian yang merugikan, seperti kematian tertanggung. Namun, beberapa faktor seperti kebutuhan dana mendesak atau beban pembayaran premi dapat mendorong pemegang polis untuk menghentikan polisnya. Pada skripsi ini, konsep *life settlement* diperkenalkan, di mana pemegang polis dapat menjual polisnya kepada investor dengan harga yang lebih tinggi daripada nilai tebus (*surrender value*). Ini menarik bagi pemegang polis yang membutuhkan dana cepat dan investor yang mencari keuntungan. Harga *life settlement* dapat dihitung sebagai selisih nilai sekarang aktuaria dari pembayaran-pembayaran premi mendatang dengan nilai sekarang aktuaria dari manfaat kematian. Tantangan utama dalam menentukan harga *life settlement* terletak pada ketidakpastian informasi, seperti tingkat bunga dan mortalitas tertanggung. Pada skripsi ini, metode *fuzzy* dipilih karena merupakan metode yang mampu memperhitungkan ketidakpastian pada informasi-informasi yang digunakan dalam menentukan harga *life settlement*. Metode ini dapat memberikan informasi yang lebih kaya dan mendalam dalam penilaian *life settlement* dibandingkan dengan perhitungan dengan parameter pasti. Untuk menunjukkan hal tersebut, dilakukan simulasi perhitungan harga *life settlement* dengan metode *fuzzy*. Setelah itu, hasil perhitungan harga *life settlement* diaproksimasi menjadi *triangular fuzzy number*, yakni *fuzzy number* yang memiliki bentuk segitiga, dengan menggunakan tiga pendekatan yaitu pendekatan *secant*, *gradient*, dan *expected interval*, agar lebih mudah untuk diinterpretasikan dan diimplementasikan. Hasil aproksimasi kemudian dievaluasi berdasarkan kriteria-kriteria dengan melihat galatnya, korelasi galat dengan tingkat keanggotaan, bias sistematis, parameter yang dipertahankan, kemudahan untuk diinterpretasikan, serta kesederhanaan kalkulasinya. Diperoleh bahwa masing-masing metode aproksimasi memiliki kelebihan dan kekurangannya masing-masing dari berbagai kriteria tersebut sehingga pemilihan metode aproksimasi yang digunakan akan bergantung pada preferensi dari pihak-pihak yang terlibat dalam transaksi *life settlement*.

Kata kunci:

Aproksimasi *triangular*, parameter pasti, pendekatan *expected interval*, pendekatan *gradient*, pendekatan *secant*, *mortality multiplier*, tingkat bunga, *triangular fuzzy number*.

## ABSTRACT

Name : Peter Alexander Wandojo  
Program : Undergraduate Study Program of Actuarial Science  
Title : Life Settlement Pricing with Fuzzy Methods

Life insurance provides compensation to policyholders in the event of adverse events, such as the death of the insured. However, factors like urgent financial needs or premium payment burdens may drive policyholders to terminate their policies. This thesis introduces the concept of life settlement, where policyholders can sell their policies to investors for a higher price than the surrender value. This is attractive to policyholders in need of quick funds and to investors seeking profit. The price of a life settlement can be calculated as the difference between the actuarial present value of future premium payments and the actuarial present value of the death benefit. The main challenge in determining the price of a life settlement lies in the uncertainty of information, such as interest rates and the mortality of the insured. This thesis employs the fuzzy method, which can account for uncertainties in the information used to determine the life settlement price. This method provides richer and deeper insights into life settlement valuations compared to calculations using fixed parameters. To demonstrate this, a simulation of the life settlement price calculation using the fuzzy method is conducted. The results are then approximated into triangular fuzzy numbers using three approaches—secant, gradient, and expected interval—to make them easier to interpret and implement. The approximated results are evaluated based on criteria that evaluates the error, correlation between the error and membership level, bias, retained parameters, interpretability, and ease of calculation. It is found that each approximation method has its strengths and weaknesses according to these criteria, so the choice of approximation method will depend on the preferences of the parties involved in the life settlement transaction.

### Keywords:

Crisp parameter, expected interval approach, gradient approach, interest rate, mortality multiplier, secant approach, triangular approximation, triangular fuzzy number.

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	<b>iii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>iv</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH</b>	<b>vii</b>
<b>ABSTRAK</b>	<b>viii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xiii</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Ruang Lingkup Penelitian .....	7
1.4 Tujuan Penelitian .....	7
1.5 Metodologi Penelitian .....	7
<b>2 LANDASAN TEORI</b>	<b>9</b>
2.1 Himpunan <i>Fuzzy</i> ( <i>Fuzzy Set</i> ) .....	9
2.2 Bilangan <i>Fuzzy</i> ( <i>Fuzzy Number</i> ) .....	9
2.3 Konstruksi <i>Triangular Fuzzy Number</i> .....	13
2.4 Aproksimasi Segitiga pada Bilangan <i>Fuzzy</i> .....	16
2.5 Teori Dasar dan Notasi dalam Ilmu Aktuaria .....	23
2.5.1 Variabel Acak Sisa Hidup .....	23
2.5.2 Perhitungan Premi Polis Asuransi .....	24
2.6 Kaidah Simpson .....	27

<b>3</b>	<b>PENENTUAN HARGA <i>LIFE SETTLEMENT</i></b>	<b>29</b>
3.1	<i>Life Settlement</i> sebagai Pasar Sekunder Polis Asuransi Jiwa	29
3.2	Penentuan Harga <i>Life Settlement</i> dengan Parameter Pasti	29
3.3	Penentuan Harga <i>Life Settlement</i> dengan Parameter <i>Fuzzy</i>	33
3.4	Aproksimasi <i>Triangular</i> pada Perhitungan Harga <i>Life Settlement</i>	34
3.4.1	Aproksimasi dengan <i>Secant Approach</i> pada Perhitungan Harga <i>Life Settlement</i>	35
3.4.2	Aproksimasi dengan <i>Gradient Approach</i> pada Perhitungan Harga <i>Life Settlement</i>	36
3.4.3	Aproksimasi dengan <i>Expected Interval Approach</i> pada Perhitungan Harga <i>Life Settlement</i>	39
<b>4</b>	<b>ANALISIS PERHITUNGAN HARGA <i>LIFE SETTLEMENT</i> DENGAN APROKSIMASI <i>TRIANGULAR FUZZY NUMBER</i></b>	<b>43</b>
4.1	Deskripsi Data	44
4.2	Konstruksi <i>Triangular Fuzzy Number</i> untuk Menghitung Harga <i>Life Settlement</i>	45
4.2.1	Konstruksi <i>Triangular Fuzzy Number Mortality Multiplier</i>	45
4.2.2	Konstruksi <i>Triangular Fuzzy Number Tingkat Bunga</i>	47
4.3	Kalkulasi Harga <i>Life Settlement</i> dengan Metode <i>Fuzzy Number</i>	48
4.4	Aproksimasi <i>Triangular Fuzzy Number</i> dari Harga <i>Life Settlement</i>	50
4.5	Kriteria Evaluasi Aproksimasi <i>Triangular Fuzzy Number</i>	53
<b>5</b>	<b>PENUTUP</b>	<b>65</b>
5.1	Kesimpulan	65
5.2	Saran	65
	<b>DAFTAR REFERENSI</b>	<b>67</b>
	<b>LAMPIRAN</b>	<b>1</b>
	<b>Lampiran 1</b>	<b>2</b>

## DAFTAR TABEL

4.1	Batas Interval Harga <i>Life Settlement</i> pada Berbagai Tingkat Keanggotaan	49
4.2	Hasil Aproksimasi TFN Harga <i>Life Settlement</i> . . . . .	51
4.3	Aproksimasi Harga <i>Life Settlement</i> dari Tiga Pendekatan pada Berbagai Tingkat Keanggotaan . . . . .	51
4.4	Galat hasil aproksimasi TFN pada berbagai tingkat keanggotaan pada interval 0 hingga 1 . . . . .	55
4.5	Galat hasil aproksimasi TFN pada berbagai tingkat keanggotaan pada interval 0,9 hingga 1 . . . . .	56
4.6	Rata-rata galat berbobot dari tiga metode aproksimasi untuk interval tingkat keanggotaan 0 hingga 1 dan 0,9 hingga 1 . . . . .	57
4.7	Peringkat Tingkat Keanggotaan dan Galat dari Tingkat Keanggotaan 0 Hingga 1 untuk Metode SA, GA, dan EIA . . . . .	59
4.8	Selisih antara hasil aproksimasi dari tiga metode aproksimasi dengan <i>fuzzy number</i> awal pada berbagai tingkat keanggotaan . . . . .	62
4.9	Ringkasan hasil evaluasi keenam kriteria terhadap tiga metode aproksimasi TFN . . . . .	64

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh gambar fungsi keanggotaan TFN	10
2.2	Diagram waktu pembayaran manfaat kematian asuransi seumur hidup untuk individu berusia $x_0$ tahun	26
2.3	Diagram waktu pembayaran premi asuransi anuitas seumur hidup untuk individu berusia $x_0$ tahun	26
3.1	Diagram waktu pembayaran manfaat kematian pada <i>life settlement</i> untuk pemegang polis yang menjual polisnya di usia $x$ tahun	32
3.2	Diagram waktu pembayaran premi pada <i>life settlement</i> untuk pemegang polis yang menjual polisnya di usia $x$ tahun	33
4.1	Perbandingan hasil aproksimasi tiga pendekatan dengan harga <i>fuzzy life settlement</i> awal	52



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, tentu saja tidak semuanya akan berjalan sesuai dengan rencana. Terdapat risiko atau ketidakpastian atas terjadinya suatu peristiwa yang dapat menyebabkan kerugian, baik kecil maupun besar. Dalam hal ini, asuransi hadir untuk meminimalisir risiko tersebut (Dyatma, dkk, 2022). Di Indonesia, pengertian asuransi tercantum dalam Undang-Undang Nomor 40 Tahun 2014 yang menyebutkan bahwa asuransi adalah perjanjian antara dua pihak, yaitu perusahaan asuransi dan pemegang polis, dimana perusahaan asuransi akan menerima premi dari pemegang polis dan sebagai gantinya perusahaan asuransi akan memberikan penggantian apabila pemegang polis mengalami kerugian atau terjadinya suatu peristiwa lain yang merugikan pemegang polis.

Pada undang-undang tersebut dijelaskan juga bahwa dengan asuransi jiwa, pemegang polis, tertanggung, atau pihak lain yang berhak akan menerima pembayaran dari perusahaan asuransi apabila tertanggung meninggal dunia atau tetap hidup pada waktu tertentu yang diatur dalam perjanjian, yang besarnya telah ditetapkan dan/atau didasarkan pada hasil pengelolaan dana oleh perusahaan asuransi (Indonesia, 2014). Saat polis asuransi jiwa masih berjalan bisa saja terjadi pemberhentian polis yang disebabkan pengajuan dari pemegang polis sendiri (*surrender*) atau diberhentikan oleh perusahaan asuransi karena terjadi penunggakan pembayaran premi (*lapse*) (Melinda, 2015). Saat polis berhenti sebelum tertanggung meninggal atau mencapai masa akhir kontrak yang ditentukan, maka pada beberapa polis tertentu, perusahaan asuransi akan memberikan uang sebesar nilai tebus (*surrender value*) kepada pihak tertanggung. Tidak menutup kemungkinan juga bahwa pemberhentian polis sebelum tertanggung meninggal atau masa polis berakhir tidak memberikan uang tebusan sama sekali (Generali Indonesia, 2022). Ketentuan besar uang tebusan yang akan diberikan perusahaan asuransi berbeda-beda untuk setiap polis dan sebaiknya ketentuan polis dibaca dengan saksama terlebih dahulu. Umumnya nilai tebus bergantung pada banyaknya premi yang sudah dibayarkan kepada perusahaan asuransi dan nilainya relatif kecil dibandingkan banyaknya premi yang sudah dibayarkan karena terdapat pemotongan berupa biaya penebusan, biaya administrasi, pinjaman polis beserta bunga, dan lainnya (AAJI, n.d.). Hal ini juga terjadi karena selama ini penjualan kembali polis asuransi merupakan pasar monopsoni dimana pembelinya hanyalah perusahaan asuransi yang mengeluarkan polis tersebut sendiri yang berarti tidak ada kompetisi dalam pembelian kembali polis tersebut (Doherty dan Singet, 2003).

Secara finansial, melakukan pemberhentian polis (*surrender*) merupakan keputusan yang buruk karena nilai tebusan cenderung kecil. Akan tetapi, pada kenyataannya terdapat beberapa alasan yang dapat menyebabkan pemegang polis tetap ingin memberhentikan polis seperti merasa tidak lagi membutuhkan polis, terjadi musibah yang mengakibatkan pemegang polis membutuhkan uang dalam jumlah besar dalam waktu yang relatif singkat, atau merasa bahwa pembayaran premi secara periodik terlalu membebani pemegang polis. Untuk membantu pemegang polis dan mencegah terjadinya pemberhentian polis, beberapa perusahaan asuransi menawarkan beberapa pilihan seperti memberikan pinjaman untuk membayar premi, perubahan nilai premi dan manfaat kematian yang akan diterima, atau merubah masa asuransi (Fajriani, dkk, 2013). Untuk di negara-negara maju seperti Amerika Serikat dan Kanada, pemegang polis memiliki opsi lain yaitu dengan memilih produk *life settlement* yang berarti pemegang polis menjual polis asuransi jiwa yang dimilikinya kepada investor yang berminat untuk berinvestasi untuk menerima sejumlah uang yang lebih tinggi dibandingkan uang tebusan dari perusahaan asuransi. Alih-alih memberhentikan polis asuransi jiwa yang dimilikinya, dengan menjual asuransi jiwa yang dimilikinya kepada investor, maka premi-premi yang masih harus dibayar ke depannya akan dibayarkan oleh investor dan juga manfaat kematian yang akan dibayarkan perusahaan asuransi saat tertanggung meninggal dunia akan dibayarkan kepada investor. *Life settlement* menjadi pilihan yang menarik karena menguntungkan semua pihak yang terlibat. Pemilik polis mendapatkan uang yang lebih besar dari nilai tebusan, investor berspekulasi akan mendapatkan uang tanggungan yang besar dari polis saat tertanggung meninggal, serta perusahaan asuransi tidak perlu mengeluarkan uang tebusan sebelum tertanggung meninggal sehingga tidak terjadi pengeluaran kas sebelum waktunya (De Andrés-Sánchez, 2021). Keberadaan investor-investor yang bersedia untuk membayar lebih tinggi dari nilai *surrender value* inilah yang menyebabkan terciptanya pasar sekunder untuk polis asuransi (Doherty dan Singer, 2003).

Sejarah *life settlement* berawal dari tahun 1911 saat seorang warga Amerika Serikat bernama John C. Burchard membutuhkan uang untuk membayar dokternya, Dr. Grigsby, sehingga Burchard memutuskan untuk menjual polis asuransi jiwa yang dimilikinya senilai \$100. Grigsby menyetujui untuk membayarkan preminya yang pada saat itu sudah tertunggak. Setahun kemudian, Burchard meninggal dunia dan Grigsby perlu membawa kasus ini ke pengadilan Mahkamah Agung Amerika Serikat ketika dirinya ingin mengklaim manfaat kematian Burchard karena permasalahan legalitas dalam melaksanakan transaksi polis asuransi jiwa ke pihak ketiga. Akhirnya Grigsby memenangkan pengadilan tersebut dan dapat mengklaim manfaat kematian Burchard (Harbor Life Settlements, 2021). Pada beberapa dekade berikutnya, *life settlement* belum mendapatkan perhatian yang banyak

dari masyarakat, hingga akhirnya sekitar tahun 1980-1999 saat terjadi epidemi AIDS di Amerika Serikat yang menyebabkan *life settlement* menarik perhatian para pemilik polis asuransi di Amerika Serikat (Abacus Life Settlements, 2022). Selain di Amerika Serikat, *life settlement* juga terus berkembang di beberapa negara lain seperti Jerman dan Inggris (Gatzert, 2010). Hingga kini, diproyeksikan volume pasar dari *life settlement* mencapai \$60 miliar dolar sebelum 2025 dan potensi pasar keseluruhan tahunan mencapai \$212 miliar dolar di antara 2019 dan 2028 (De Andrés-Sánchez, 2021). Pada tahun 2023, para pemegang polis telah memperoleh lebih dari 842 juta dolar dari 3218 transaksi *life settlement* yang dicatat Life Insurance Settlement Association (LISA) dengan total manfaat asuransi sebesar 4,6 miliar dolar. Secara rata-rata, *life settlement* membayarkan 6,2 kali lebih besar daripada *surrender value* (Lisa, 2024).

Umumnya *life settlement* menjadi pilihan bagi tertanggung yang memiliki ekspektasi sisa masa hidup lebih rendah dari orang-orang dengan profil demografis yang mirip dengan tertanggung. Dengan berkurangnya ekspektasi sisa masa hidup, maka faktor diskonto yang dikenakan pada uang tanggungan akan semakin kecil dan banyak premi yang harus dibayar semakin sedikit sehingga nilai saat ini dari polis semakin besar. Hal ini akan membuat investor semakin tertarik pada polis asuransi yang dijual dan tidak akan segan untuk memberikan tawaran uang *life settlement* yang lebih besar. Maka dari itu, diperlukan perhitungan tingkat kematian tertanggung serta tingkat bunga yang dapat dipercaya agar penilaian *life settlement* dapat memberikan nilai yang menarik bagi pemegang polis dan tetap memberikan keuntungan bagi investor (De Andrés-Sánchez, 2021).

Dalam transaksi perdagangan *life settlement*, terdapat beberapa pihak yang terkait di antaranya adalah pemegang polis, broker, penyedia *life settlement*, penyedia *life expectancy*, investor institusional, serta pihak-pihak pendukung lainnya seperti agen yang memonitor kesehatan tertanggung dan penasihat hukum. Secara umum, proses transaksi dimulai dari sisi penjual yaitu pemegang polis yang berusaha untuk mencari investor yang ingin membeli polisnya. Untuk mempermudah pemegang polis dalam mencari investor, seringkali transaksi melibatkan broker yang bertugas untuk mencari harga tertinggi untuk polis yang ingin dijual. Broker dapat menemukan investor yang ingin membeli polis asuransi secara langsung atau broker juga dapat menjualnya ke penyedia *life settlement* yang biasa membeli polis asuransi atas nama investor institusional (yang biasanya mengsekuritisasi portofolionya). Selain dari pihak pembeli, penjual, dan perantara, transaksi *life settlement* juga memerlukan informasi-informasi penting yang diperlukan untuk menentukan harga *life settlement* seperti informasi kesehatan dari penyedia *life expectancy*. Biasanya informasi medis seperti tingkat mortalitas tertanggung

disediakan oleh penyedia *life expectancy* seperti *medical underwriter*. *Medical underwriter* menentukan tingkat mortalitas tertanggung berdasarkan informasi-informasi dari ahli seperti dokter, pangkalan data medis, aktuaris, dan sumber relevan lainnya. Dari informasi-informasi yang didapatkan, *medical underwriter* akan menentukan nilai *mortality multiplier* dari tertanggung yang merupakan penyesuaian terhadap peluang kematian tertanggung dari data yang tersedia pada tabel mortalitas (De Andrés-Sánchez, 2021).

Tantangan bagi aktuaris dalam hal ini adalah menentukan harga *life settlement* yang terbaik. Apabila harga *life settlement* terlalu tinggi, maka investor akan merasa dirugikan, sedangkan apabila harganya terlalu rendah, maka pemegang polis lah yang akan merasa dirugikan. Dalam menentukan harga *life settlement*, aktuaris menggunakan nilai sekarang dari pembayaran-pembayaran premi dan manfaat di masa depan. Maka dari itu, aktuaris memerlukan tingkat bunga untuk menghitung nilai sekarang dan juga aktuaris memerlukan informasi mortalitas tertanggung untuk menghitung besar pembayaran premi yang masih perlu dilakukan serta mengetahui durasi hingga penerimaan manfaat (Bhattacharya dan Sood, 2004). Tentunya seiring berjalannya waktu, terdapat perkembangan beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan harga *life settlement*.

Pendekatan-pendekatan yang telah dilakukan dalam menentukan harga *life settlement* adalah metode deterministik, metode probabilistik, metode stokastik, dan metode *fuzzy* (Lubovich, dkk, 2008). Metode deterministik mengasumsikan bahwa pemegang polis akan membayarkan premi dan menerima manfaat kematian sesuai dengan ekspektasi sisa masa hidup tertanggung. Metode deterministik sangat mudah dipahami dan dihitung dibandingkan dengan metode lainnya karena hanya memerlukan ekspektasi sisa masa hidup dari pihak medis dan asumsi tingkat bunga. Akan tetapi, seiring dengan berkembangnya metode lain, hasil perhitungan metode deterministik dirasa kurang akurat karena tidak memperhitungkan kemungkinan pemegang polis meninggal dunia lebih cepat atau lebih lambat dari ekspektasi. Pada metode probabilistik, kini harga *life settlement* ditentukan dengan mempertimbangkan tingkat mortalitas atau kemungkinan tertanggung meninggal pada setiap usia. Untuk metode stokastik, harga *life settlement* juga ditentukan dengan mempertimbangkan probabilitas tertanggung meninggal. Akan tetapi, pada metode stokastik, harga *life settlement* diperoleh dengan menyimulasikan masa hidup tertanggung dengan simulasi Monte Carlo berdasarkan probabilitas kematian dari tertanggung. Dengan menggunakan simulasi pada metode stokastik, dapat diperhitungkan secara pasti berapa banyak premi yang akan dibayarkan dan kapan manfaat akan dibayarkan. Meskipun ekspektasi harga *life settlement* yang dihasilkan metode probabilistik dan stokastik sama, metode stokastik dan metode probabilistik memiliki kelebihan dan kekurangannya masing-masing. Metode probabilistik merupakan pilihan yang lebih baik

untuk menghitung harga *life settlement* individu sedangkan metode stokastik merupakan pilihan yang lebih baik untuk menghitung harga *life settlement* kelompok atau dalam suatu portofolio yang terdiri dari beberapa polis asuransi jiwa karena meskipun metode stokastik dapat memberikan informasi berupa waktu masa hidup tertanggung dengan lebih konkrit (hasil simulasi) namun diperlukan banyak simulasi agar metode stokastik dapat memberikan harga yang lebih sesuai. Metode probabilistik dan metode stokastik juga memerlukan asumsi tingkat bunga ditambah dengan asumsi tingkat mortalitas tertanggung dan keduanya merupakan parameter pasti (Lubovich, dkk., 2008).

Pada nyatanya, *life settlement* diperjualbelikan di pasar yang tidak transparan sehingga dapat memunculkan informasi yang tidak relevan dan terdapat banyak ketidakpastian yang dapat memengaruhi harganya. Sebagai contoh, informasi tingkat bunga dari berbagai investor dan broker dapat berbeda-beda sehingga tidak mungkin bagi aktuaris untuk memilih salah satu tingkat bunga dari berbagai informasi (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023). Dengan bantuan metode *fuzzy*, berbagai macam ketidakpastian seperti ketepatan asumsi dan informasi subjektif dapat diperhitungkan. Informasi seperti "sekitar 6%" dan "relatif tinggi" kini dapat dimanfaatkan (Shapiro, 2004). Variabel acak *fuzzy* juga sudah digunakan beberapa kali untuk memperhitungkan ketidakpastian parameter-parameter di industri asuransi (Aalaei, 2022). Penggunaan metode *fuzzy* dalam bidang keuangan sudah berkembang sejak akhir tahun 1980-an dan awal tahun 1990-an yang diawali dengan penelitian-penelitian oleh Kaufmann (1986), Buckley (1987), dan Calzi (1990). Dalam bidang asuransi jiwa, Andrade dan Valencia (2022) telah mengajukan metode *fuzzy random survival forest* untuk memodelkan *lapse rates* dalam sebuah portofolio asuransi jiwa yang memiliki data tidak lengkap dan juga Aalaei (2022) telah mengajukan metode perhitungan harga *life settlement* dengan metode *fuzzy* hanya untuk tingkat bunganya saja.

Untuk penghitungan harga *life settlement*, parameter seperti tingkat bunga tahunan atau *internal rate of return* (IRR) akan berubah dari tahun ke tahun dan karena informasi di masa depan hanya dapat diprediksi, maka diperlukan bantuan seperti metode *fuzzy* untuk memodelkannya. Selain tingkat bunga tahunan, informasi tingkat mortalitas tertanggung juga merupakan informasi yang tidak pasti. Meskipun informasi dapat diperoleh dari berbagai ahli seperti dokter, belum tentu informasi yang diberikan selalu konsisten dan sama persis. Maka dari itu, metode *fuzzy* juga dapat membantu aktuaris dengan memberikan informasi mengenai berbagai kemungkinan untuk menentukan harga *life settlement* yang lebih sesuai. Tingkat bunga dan *mortality multiplier* akan dimodelkan dengan *triangular fuzzy number*, yaitu *fuzzy number* yang dapat memberikan informasi mengenai batas bawah dan batas atas nilai parameter-parameter terse-

but. Harga *life settlement* sebagai fungsi dari tingkat bunga dan *mortality multiplier* tidak akan lagi berbentuk *triangular*, maka akan dilakukan aproksimasi menjadi bentuk *triangular* karena dipercaya bahwa bentuk *triangular* memberikan keseimbangan antara kemudahan perhitungan, kesederhanaan interpretasi, dan informasi yang didapatkan dari ketidakpastian (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023).

Berdasarkan penjelasan mengenai *life settlement* dan metode *fuzzy* di atas, penelitian ini bertujuan untuk menelusuri lebih lanjut metode perhitungan harga *life settlement* yang memperhitungkan ketidakpastian informasi tingkat bunga dan *mortality multiplier* dari berbagai sumber. Dengan menggunakan metode ini, hasil perhitungan harga *life settlement* akan memberikan informasi yang lebih kaya dan mendalam dibandingkan perhitungan menggunakan parameter pasti.

Pada penelitian ini, kerangka kerja dari perhitungan harga *life settlement* terdiri dari 4 langkah. Langkah pertama dimulai dari memodelkan *mortality multiplier* dan tingkat bunga dengan *triangular fuzzy number* sesuai dengan informasi yang tersedia. Langkah kedua adalah menghitung harga *fuzzy* dari *life settlement* dengan persamaan-persamaan *triangular fuzzy number*. Untuk langkah ketiga, akan disimplifikasi informasi yang dimiliki dengan memodelkan harga *life settlement* dengan aproksimasi *triangular* yang akan memberikan kemudahan dalam interpretasi dan perhitungan dengan pendekatan *secant*, *gradient*, dan *expected interval*. Terakhir, pada langkah keempat, terdapat enam kriteria yang diajukan (De Andrés-Sánchez dan Puchades (2023)) yang dapat membantu pengambilan keputusan dalam memilih metode aproksimasi yang digunakan pada perhitungan harga *life settlement*. Kriteria-kriteria tersebut bertujuan untuk memandu proses pengambilan keputusan dan memperhitungkan faktor-faktor seperti kualitas aproksimasi, kemudahan untuk digunakan, dan kemudahan untuk dimengerti individu yang tidak memiliki pengetahuan mengenai *fuzzy number* (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023).

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, adapun rumusan masalah yang dibahas pada skripsi ini yaitu:

1. Bagaimana proses penentuan harga *life settlement* dengan metode *fuzzy*?
2. Apa saja kelebihan dan kekurangan dari masing-masing metode aproksimasi *triangular fuzzy number* untuk perhitungan harga *life settlement*?

### 1.3 Ruang Lingkup Penelitian

Untuk menyederhanakan permasalahan tanpa mengurangi esensi dari permasalahan, maka dibuatlah pembatasan masalah. Adapun ruang lingkup permasalahan yang dibahas pada skripsi ini yaitu:

1. Metode aproksimasi *triangular fuzzy number* hanya pada metode pendekatan *Secant*, *Gradient*, dan *Exepected Interval*.
2. Jenis polis yang dibahas dan diformulasikan adalah asuransi seumur hidup (*whole life*).

### 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penulisan skripsi ini yaitu:

1. Menjelaskan proses penentuan harga *life settlement* dengan metode *fuzzy*.
2. Menganalisis kelebihan dan kekurangan dari masing-masing metode aproksimasi *triangular fuzzy number* untuk perhitungan harga *life settlement*.

### 1.5 Metodologi Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur dan simu-lasi numerik terhadap model yang didapat.



## BAB 2 LANDASAN TEORI

Bab ini membahas mengenai himpunan *fuzzy*, bilangan *fuzzy*, konstruksi *triangular fuzzy number*, aproksimasi segitiga pada bilangan *fuzzy*, teori dasar dan notasi dalam ilmu aktuaria, serta kaidah Simpson.

### 2.1 Himpunan *Fuzzy* (*Fuzzy Set*)

Zadeh (1965) memperkenalkan teori mengenai himpunan *fuzzy* (*fuzzy set*). Sebuah *fuzzy set*  $\tilde{A}$  dapat didefinisikan sebagai  $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$  dimana  $\mu_{\tilde{A}}$  adalah fungsi keanggotaan yang menandakan tingkat keanggotaan dari  $x$  di dalam *fuzzy set* tersebut.  $\mu_{\tilde{A}}$  merupakan pemetaan dari himpunan referensi  $X$  ke interval  $[0,1]$ , yaitu  $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$  dengan  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$  mengindikasikan  $x$  bukan anggota dari *fuzzy set*  $\tilde{A}$  dan  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$  mengindikasikan  $x$  merupakan anggota absolut dari *fuzzy set*  $\tilde{A}$ . *Support* dari *fuzzy set*  $\tilde{A}$  merupakan himpunan yang berisi semua  $x \in X$  yang memiliki tingkat keanggotaan lebih besar dari 0.

Sebuah *fuzzy set* juga dapat didefinisikan berdasarkan himpunan-himpunan  $\alpha$ -levelnya atau disebut  $\alpha$ -cut. Sebuah  $\alpha$ -cut adalah sebuah *crisp set*  $A_\alpha$  yang didefinisikan sebagai  $A_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1]$  yang berarti himpunan  $\alpha$ -level atau  $\alpha$ -cut merupakan himpunan yang berisi semua  $x \in X$  yang memiliki tingkat keanggotaan lebih besar dari  $\alpha$ . Saat  $\alpha$  bernilai 0,  $A_0$  disebut sebagai *closure* dari *support* himpunan  $\tilde{A}$  yang berarti  $A_0$  merupakan himpunan yang berisi semua  $x \in X$  yang memenuhi  $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0$ .

### 2.2 Bilangan *Fuzzy* (*Fuzzy Number*)

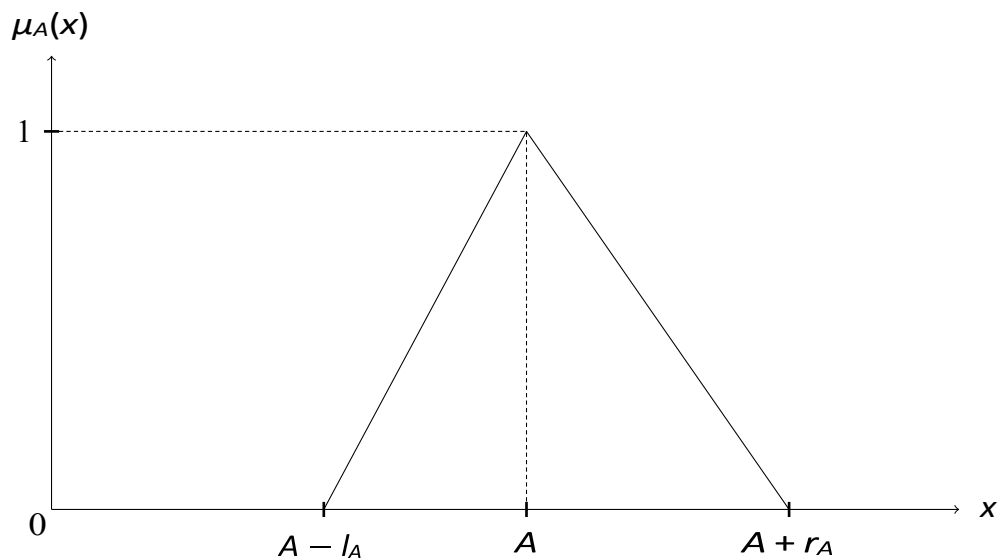
Bilangan *fuzzy* adalah sebuah *fuzzy set* yang terdefinisi pada himpunan bilangan riil,  $\mathbb{R}$ , yang bersifat normal (terdapat anggota yang merupakan anggota absolut,  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ ), konveks ( $\mu_{\tilde{A}}(tx + (1 - t)y) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y))$ ,  $t \in (0, 1) \forall x, y \in X$ ), dan memiliki  $\alpha$ -cut yang berupa interval tertutup dan terbatas. Maka dari itu, sebuah *fuzzy number* dapat direpresentasikan sebagai interval kepercayaan  $A_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$ , dengan  $\underline{A}(\alpha)$  adalah fungsi naik kontinu dan  $\overline{A}(\alpha)$  adalah fungsi turun kontinu terhadap tingkat keanggotaan  $\alpha \in [0, 1]$ . *Fuzzy number* biasanya digunakan untuk memodelkan informasi (himpunan referensi) yang mengandung ketidakpastian (informasi *fuzzy*), contohnya himpunan referensi berisikan nilai-nilai yang mungkin untuk sebuah variabel yang didapatkan dari berbagai sumber. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk memodelkan informasi *fuzzy* tersebut adalah dengan menggunakan *triangular fuzzy numbers* (TFNs), yang dinotasikan dengan

$\tilde{A} = (A, l_A, r_A)$ . Pada hakikatnya, penggunaan TFN memodelkan informasi *fuzzy* ke dalam bentuk segitiga dimana puncak segitiga merupakan anggota absolut dan semakin mendekat ke dasar segitiga, maka informasi tersebut memiliki tingkat keanggotaan semakin rendah. Fungsi keanggotaan dan  $\alpha$ -cut dari TFN adalah :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - A + l_A}{l_A}, & A - l_A < x \leq A \\ \frac{A + r_A - x}{r_A}, & A < x \leq A + r_A \\ 0, & \text{—} \quad x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$A_\alpha = \underline{A}(\alpha), \bar{A}(\alpha) = [A - l_A(1 - \alpha), A + r_A(1 - \alpha)] \quad (2.2)$$

Berikut gambar dari fungsi keanggotaan TFN yang memiliki bentuk segitiga :



Gambar 2.1: Contoh gambar fungsi keanggotaan TFN

Nilai  $A$  adalah nilai inti dari TFN  $\tilde{A}$  dan dapat diinterpretasikan sebagai nilai yang paling dapat dipercaya, yaitu  $\mu_{\tilde{A}}(A) = 1$ . Parameter  $l_A, r_A \geq 0$  adalah radius yang mengindikasikan variabilitas dari  $\tilde{A}$  terhadap nilai intinya,  $A$ , dengan  $l_A$  merupakan selisih nilai terkecil pada TFN dengan  $A$ , dan  $r_A$  merupakan selisih nilai terbesar pada TFN dengan  $A$ . Interval  $A_0 = \underline{A}(0), \bar{A}(0) = [A - l_A, A + r_A]$  adalah *support* dari  $\tilde{A}$ . Interval tersebut mengandung semua nilai yang mungkin dari variabel  $\tilde{A}$  yang dibatasi dengan  $A - l_A$  di bawah dan  $A + r_A$  di atas (Zadeh, 1965).

TFN digunakan dalam berbagai kasus termasuk kasus-kasus yang berhubungan dengan aktuaria karena TFN cocok untuk mengkuantifikasi prediksi-prediksi yang tidak akurat. Sebagai contoh, saat seorang aktuaris memberikan prediksi tingkat bunga tahu-

nan 2 tahun ke depan adalah 1.5% dengan deviasi terhadap nilai terbesar yang mungkin adalah 0.5% dan deviasi terhadap nilai terkecil yang mungkin adalah 0.1%, maka informasi tersebut dapat dikuantifikasi dengan TFN sebagai  $\tilde{A} = (0.015, 0.001, 0.005)$ . Ditambah lagi, saat informasi mengenai sebuah variabel tidak pasti dan tidak ada informasi mengenai cara memodelkan ketidakpastian tersebut, hukum parsimoni mengarahkan untuk merepresentasikan informasi tersebut dengan cara yang paling sederhana. Bentuk fungsi keanggotaan dan  $\alpha$ -cut dari TFN pada persamaan (2.1) dan (2.2) yang linier memenuhi kriteria tersebut dan merupakan metode yang intuitif dan mudah diinterpretasikan (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023). Meskipun TFN memiliki batasan saat menghadapi informasi-informasi tidak akurat yang melibatkan beberapa sumber ketidakpastian, penggunaan *fuzzy number*, terutama yang berbentuk linier, merupakan cara yang sederhana untuk merepresentasikan informasi. Sebenarnya terdapat berbagai jenis perkembangan *fuzzy set* lain yang dapat mengatasi kekurangan *fuzzy number* yang sederhana. Akan tetapi, meskipun metode perkembangan tersebut dapat memberikan representasi yang lebih akurat dan mendalam terhadap variabel yang memiliki ketidakpastian, metode tersebut memerlukan estimasi parameter yang lebih banyak. Pada kasus dimana informasi sulit didapatkan atau membutuhkan penilaian subjektif dari manusia, model sederhana yang tidak membutuhkan banyak parameter akan lebih dipilih. Salah satu contoh kasusnya adalah pada perhitungan harga *life settlement* yang merupakan pasar sekunder asuransi jiwa, polis yang dijual perusahaan asuransi dijual kembali ke investor. Beroperasi di pasar sekunder yang tidak transparan akan menyebabkan informasi yang akurat sulit untuk diperoleh.

Ekspektasi interval dari *fuzzy number*  $\tilde{A}$ ,  $EI(\tilde{A})$ , adalah interval representatif dari *fuzzy number* tersebut, yaitu

$$EI(\tilde{A}) = \left[ \int_0^1 A(\alpha) d\alpha, \int_0^1 \underline{A}(\alpha) d\alpha \right] \quad (2.3)$$

dan untuk TFN  $\tilde{A} = (A, l_A, r_A)$ , berdasarkan persamaan (2.2), ekspektasi intervalnya dapat diperoleh yaitu :

$$\begin{aligned} EI(\tilde{A}) &= \left[ \int_0^1 (A - l_A(1 - \alpha)) d\alpha, \int_0^1 (A + r_A(1 - \alpha)) d\alpha \right] \\ &= \left[ A - \frac{l_A}{2}, A + \frac{r_A}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Misalkan terdapat  $n$  variabel  $x_j, j = 1, 2, \dots, m, m + 1, \dots, n$  yang masing-masing mewakili sebuah informasi *fuzzy*. Masing-masing variabel tersebut dapat direpresentasikan dengan *fuzzy number*-nya tersendiri yaitu  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m, \tilde{A}_{m+1}, \dots, \tilde{A}_n$ . Misalkan terdapat fungsi  $f(\cdot)$  yang merupakan fungsi dari  $n$  variabel tersebut. Hukum *extension* yang dibahas Zadeh (1965) menyatakan bahwa ketidakpastian dari  $f(\cdot)$  dapat dimodelkan dengan sebuah *fuzzy number*, misal  $\tilde{B}$ , sebagai fungsi dari *fuzzy number-fuzzy number*  $n$  variabel yang memengaruhi nilai fungsi  $f(\cdot)$  tersebut, atau secara matematis dapat ditulis sebagai  $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m, \tilde{A}_{m+1}, \dots, \tilde{A}_n)$ . Meskipun biasanya bentuk eksplisit fungsi keanggotaan dari  $\tilde{B}$ ,  $\mu_{\tilde{B}}$ , sulit untuk didapatkan, seringkali bentuk tertutup untuk  $\alpha$ -cutnya,  $B_\alpha$ , dapat dicari (Zadeh, 1965). Apabila  $f(\cdot)$  merupakan fungsi naik terhadap  $m$  variabel pertamanya dan turun di  $n - m$  variabel terakhir,  $m \leq n$ , maka Buckley dan Qu (1990) merumuskan persamaan untuk  $B_\alpha$ , yaitu

$$B_\alpha = \underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha) = f(\underline{A}_1(\alpha), \underline{A}_2(\alpha), \dots, \underline{A}_m(\alpha), \overline{A}_{m+1}(\alpha), \overline{A}_{m+2}(\alpha), \dots, \overline{A}_n(\alpha), \\ f(\overline{A}_1(\alpha), \overline{A}_2(\alpha), \dots, \overline{A}_m(\alpha), \underline{A}_{m+1}(\alpha), \underline{A}_{m+2}(\alpha), \dots, \underline{A}_n(\alpha)) \quad (2.5)$$

yang merupakan persamaan yang relevan pada kasus perhitungan harga *life settlement* karena fungsi harga *life settlement* adalah fungsi yang kontinu dan dapat berupa fungsi naik maupun fungsi turun terhadap variabel-variabelnya.

Pada kasus penggunaan TFN, dimana  $\tilde{A}_j = (A_j, l_{A_j}, r_{A_j}), j = 1, 2, \dots, n$ , maka berdasarkan persamaan (2.2) dan (2.3),  $B_\alpha$  menjadi

$$\underline{B}(\alpha) = f(A_1 - l_{A_1}(1 - \alpha), \dots, A_m - l_{A_m}(1 - \alpha), \\ A_{m+1} + r_{A_{m+1}}(1 - \alpha), \dots, A_n + r_{A_n}(1 - \alpha)) \quad (2.6)$$

$$\overline{B}(\alpha) = f(A_1 + r_{A_1}(1 - \alpha), \dots, A_m + r_{A_m}(1 - \alpha), \\ A_{m+1} - l_{A_{m+1}}(1 - \alpha), \dots, A_n - l_{A_n}(1 - \alpha)) \quad (2.7)$$

dan secara umum, apabila  $f(\cdot)$  bukan merupakan fungsi linier, maka  $\tilde{B}$  tidak lagi memiliki bentuk *triangular* yang dimiliki TFN  $\tilde{A}_j = (A_j, l_{A_j}, r_{A_j}), j = 1, 2, \dots, n$ . Agar *fuzzy number*  $\tilde{B}$  dapat memenuhi sifat parsimoni, memiliki fungsi keanggotaan yang eksplisit, dan mudah diinterpretasikan, maka dapat dilakukan aproksimasi terhadap  $\tilde{B}$  agar menjadi bentuk yang lebih sederhana.

### 2.3 Konstruksi *Triangular Fuzzy Number*

Pada kenyataannya, informasi yang akan ditemukan dalam kehidupan sehari-hari belum berupa *fuzzy number*. Maka dari itu, kumpulan informasi-informasi parameter pasti tersebut perlu diubah menjadi sebuah *fuzzy number* yang dapat memperhitungkan ketidakpastian (proses *fuzzification*). Kumpulan informasi-informasi parameter pasti ini biasanya berupa penilaian terhadap suatu objek oleh berbagai ahli. Dikarenakan subjektivitas dari manusia, penilaian terhadap suatu objek yang sama dapat berbeda-beda. Seperti yang telah dijelaskan di subbab 2.2, salah satu jenis *fuzzy number* yang praktis untuk digunakan dan mudah untuk diinterpretasikan adalah TFN. Maka dari itu, kumpulan informasi-informasi parameter pasti akan diubah menjadi TFN. Untuk mengubahnya, dapat digunakan metode yang diajukan oleh Cheng (2004), yaitu mengumpulkan informasi yang terdiri dari  $n$  parameter pasti ke dalam sebuah himpunan,  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ , yang akan diubah menjadi sebuah TFN  $\tilde{A} = (A, l_A, r_A)$ .

Pertama, akan dibentuk matriks jarak  $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{n \times n}$ , dimana entri matriks pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ , dinotasikan dengan  $d_{ij}$ , adalah jarak antara entri ke- $i$  dan entri ke- $j$  dari himpunan informasi parameter pasti, atau dapat ditulis sebagai

$$d_{ij} = |a_i - a_j|, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.8)$$

yang mengimplikasikan bahwa  $d_{ii} = 0$  dan  $d_{ij} = d_{ji}$ . Setelah itu, hitung rata-rata dari jarak entri ke- $i$  dengan  $n-1$  entri lainnya dari himpunan informasi parameter pasti sebagai

$$\bar{d}_i = \frac{\sum_{j=1}^n d_{ij}}{n-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.9)$$

yang juga dapat merepresentasikan jarak relatif entri ke- $i$  dengan pusat TFN. Semakin besar jaraknya, maka kepentingan entri himpunan tersebut akan semakin kecil karena jaraknya semakin jauh dengan inti TFN, atau dapat disebut kepentingan entri himpunan berbanding terbalik dengan jarak rata-ratanya. Misal, dinotasikan bobot atau tingkat kepentingan dari entri himpunan ke- $i$  sebagai  $w_i$ . Tingkat kepentingan entri himpunan memiliki batasan sebagai berikut,

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 1, \quad \forall i \quad (2.10)$$

Lalu, akan dibentuk matriks  $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{n \times n}$ , dimana entri matriks pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ , dinotasikan dengan  $p_{ij}$ , merupakan rasio kepentingan dari entri himpunan ke- $i$  ter-

hadap entri himpunan ke- $j$  atau rasio jarak rata-rata entri himpunan ke- $j$  terhadap jarak rata-rata entri himpunan ke- $i$ , yakni

$$p_{ij} = \frac{\bar{d}_j}{d_i} = \frac{w_i}{w_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.11)$$

Setelah itu, bobot atau tingkat kepentingan dari entri himpunan ke- $i$ ,  $w_i$ , dapat dihitung berdasarkan persamaan (2.10) dan (2.11) yaitu,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n (p_{ij} \cdot w_j) &= 1 \\ w_j &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (2.12)$$

Setelah mendapatkan bobot untuk masing-masing entri himpunan, maka dapat dihitung inti dari TFN  $\tilde{A}$ ,  $A$ , yaitu,

$$A = \sum_{i=1}^n w_i a_i. \quad (2.13)$$

Berikutnya, untuk menghitung deviasi kiri dan kanan dari TFN  $\tilde{A}$ ,  $l_A$  dan  $r_A$ , diperlukan ukuran rata-rata deviasi dari *fuzzy number*. Cheng (2004) mendefinisikan rata-rata deviasi dari sebuah *fuzzy number*,  $\sigma$ , sebagai berikut,

$$\sigma = \frac{\int_{A-l_A}^{A+r_A} |x - A| \cdot \mu_A(x) dx}{\int_{A-l_A}^{A+r_A} \mu_A(x) dx} \quad (2.14)$$

Dengan menggunakan fungsi keanggotaan dari TFN berdasarkan persamaan (2.1), maka persamaan (2.14) akan menjadi,

$$\sigma = \frac{l^2 + r^2}{3(l_A + r_A)} \quad (2.15)$$

Selain itu, juga akan didefinisikan rasio deviasi kiri dan deviasi kanan dari sebuah TFN,  $\eta$ , sebagai berikut,

$$\eta = \frac{l_A}{r_A} \quad (2.16)$$

Lalu, dengan menyelesaikan persamaan (2.15) dan (2.16), dapat diperoleh deviasi kiri dan kanan dari TFN,  $l_A$ ,  $r_A$  sebagai berikut,

$$l_A = \frac{3(1 + \eta)\eta\sigma}{1 + \eta^2} \quad (2.17)$$

$$r_A = \frac{3(1 + \eta)\sigma}{1 + \eta^2} \quad (2.18)$$

Akan tetapi, karena nilai  $\eta$  dan  $\sigma$  tidak dapat dihitung sebelum mengetahui nilai  $l_A$  dan  $r_A$ , maka nilai  $\eta$  dan  $\sigma$  akan diestimasi. Nilai aproksimasi rata-rata deviasi,  $\hat{\sigma}$ , dapat diestimasi dengan menggunakan formula rata-rata berbobot dari deviasi masing-masing anggota himpunan informasi sebagai berikut,

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i |a_i - A|}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (2.19)$$

Untuk menghitung aproksimasi nilai rasio,  $\hat{\eta}$ , akan dihitung terlebih dahulu rata-rata berbobot dari entri himpunan yang lebih besar dari inti TFN, dinotasikan  $a^r$ , dan rata-rata berbobot dari entri himpunan yang lebih kecil dari inti TFN, dinotasikan  $a^l$ , dengan formula sebagai berikut.

$$a^r = \frac{\sum_{i=1, a_i > A}^n w_i a_i}{\sum_{i=1, a_i > A} w_i} \quad (2.20)$$

$$a^l = \frac{\sum_{i=1, a_i < A} w_i a_i}{\sum_{i=1, a_i < A} w_i} \quad (2.21)$$

Maka, dengan asumsi bahwa  $a^r$  dan  $a^l$  berada pada  $\alpha$ -level yang sama, maka  $\hat{\eta}$  dapat dihitung sebagai berikut,

$$\hat{\eta} = \frac{A - a^l}{a^r - A} \quad (2.22)$$

Hasil aproksimasi  $\hat{\eta}$  dan  $\hat{\sigma}$  dapat disubstitusikan ke persamaan (2.17) dan (2.18) untuk mendapatkan nilai  $l_A$  dan  $r_A$ , sehingga terbentuklah TFN  $\tilde{A} = (A, l_A, r_A)$  dari himpunan informasi-informasi parameter pasti.

## 2.4 Aproksimasi Segitiga pada Bilangan Fuzzy

Teori himpunan *fuzzy* telah terbukti sebagai salah satu metode yang populer untuk memodelkan ketidakpastian. Hal ini telah ditunjukkan dari berbagai jurnal sains dan penggunaan secara langsung. Saat mengevaluasi fungsi nonlinier dari *triangular fuzzy number*, hasilnya bukanlah sebuah *triangular fuzzy number* lagi. Akan tetapi, variabel yang dimodelkan dapat dijelaskan secara akurat karena  $\alpha$ -cutnya memberikan nilai numerik yang detail. Hal ini menyebabkan terjadinya dilema terkait akurasi berlebih saat menjelaskan kejadian yang tidak pasti. Meskipun  $\alpha$ -cut memberikan informasi numerik secara detail yang dapat dimanfaatkan oleh analisis, di sisi lain deskripsi yang terlalu detail dapat menyebabkan interpretasi metode *fuzzy* secara umum menjadi sulit. Selain itu, bentuk kompleks dari fungsi keanggotaan juga dapat menjadi tantangan dalam proses kalkulasi. Seringkali, bentuk yang sederhana seperti bentuk linier dianggap cukup untuk menjelaskan ketidakpastian serta mudah untuk diinterpretasikan dan diimplementasikan (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023).

Untuk mengatasi fungsi nonlinier dari *fuzzy number*, berbagai pendekatan aproksimasi telah dikembangkan. Dari berbagai pendekatan, aproksimasi *triangular* menjadi salah satu yang mendapatkan banyak perhatian karena hasil aproksimasinya membuat *fuzzy number* dapat direpresentasikan hanya dengan tiga parameter, yaitu batas bawah *support*, batas atas *support*, dan juga intinya. Tujuan dari aproksimasi ini adalah untuk mengurangi kesulitan perhitungan dan menyederhanakan interpretasi sehingga terbentuk keseimbangan antara akurasi dan kepraktisan. Terlebih lagi, *triangular fuzzy number* memiliki interpretasi yang intuitif yang membuat metode ini efektif dalam proses pengambilan keputusan. Hal ini lah yang menyebabkan terdapat banyak literasi yang mengembangkan metode aproksimasi non-*triangular fuzzy number* menjadi bentuk *triangular*.

Pada penelitian ini, digunakan tiga aproksimasi *triangular* dari *fuzzy number*  $\tilde{B}$  yang terbentuk dari fungsi  $f$  saat dievaluasi dengan *triangular fuzzy number*  $\tilde{A}_j = (A_j, l_{A_j}, r_{A_j})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Aproksimasi-aproksimasi yang digunakan adalah *secant approach* (SA), *gradient approach* (GA), dan *expected interval approach* (EIA).

- *Secant approach*

Pendekatan ini membuat bentuk *triangular* pada  $\tilde{B}$  dengan menggunakan garis *secant* yang menghubungkan batas bawah 0-cut dan 1-cut, yaitu  $\underline{B}(0)$  dan  $\underline{B}(1)$ , dan juga batas atas dari kedua  $\alpha$ -cut tersebut, yaitu  $\overline{B}(0)$  dan  $\overline{B}(1)$ . Aproksimasi tetap mempertahankan inti dan *support* dari *fuzzy number* awal  $\tilde{B}$ . Meskipun sederhana, pendekatan ini cocok untuk operasi aritmatika nonlinier dari *fuzzy number*, memo-

delkan ketidakpastian di bidang keuangan, dan juga memperhitungkan ketidakpastian dalam ilmu aktuaria. Berikut formula dari *secant approach*, yaitu

$$B^S = \underline{B}(1) = \overline{B}(1) = f(A_1, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots, A_n) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} I_{BS} &= B^S - \underline{B}(0) \\ &= B^S - f(A_1 - I_{A_1}, \dots, A_m - I_{A_m}, A_{m+1} + r_{A_{m+1}}, \dots, A_n + r_{A_n}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} r_{BS} &= \overline{B}(0) - B^S \\ &= f(A_1 + r_{A_1}, \dots, A_m + r_{A_m}, A_{m+1} - I_{A_{m+1}}, \dots, A_n - I_{A_n}) - B^S \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dengan demikian, terbentuklah *fuzzy number* yang telah diaproksimasi dengan *secant approach*,  $\tilde{B}^S = (B^S, I_{BS}, r_{BS})$  dengan  $B^S$  sebagai inti dari *fuzzy number*,  $I_{BS}$  sebagai deviasi dari inti terhadap nilai terkecil, dan  $r_{BS}$  sebagai deviasi dari inti terhadap nilai terbesar (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023).

- *Gradient approach*

Aproksimasi ini terbentuk dari ekspansi polinomial Taylor orde pertama dari 1-cut ke  $\alpha$ -cut manapun. Aproksimasi dengan *gradient approach* juga mempertahankan inti dari *fuzzy number* awal  $\tilde{B}$ . Aproksimasi dari  $\underline{B}(\alpha)$  dan  $\overline{B}(\alpha)$  dapat diperoleh dengan menggunakan formula berikut,

$$\underline{B}(\alpha) \approx \underline{B}(1) + \frac{d\underline{B}(1)}{d\alpha}(\alpha - 1) \quad (2.26)$$

$$\overline{B}(\alpha) \approx \overline{B}(1) + \frac{d\overline{B}(1)}{d\alpha}(\alpha - 1) \quad (2.27)$$

Formula aproksimasi *triangular* dengan *gradient approach* adalah sebagai berikut. Untuk intinya, sama dengan inti *fuzzy number* awalnya, yaitu,

$$B^G = \underline{B}(1) = \overline{B}(1) = f(A_c) \quad (2.28)$$

Sedangkan untuk deviasi kiri dan kanannya, digunakan ekspansi polinomial Taylor

dari persamaan (2.26) dan (2.27), yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
l_{BG} &= \underline{B}(1) - \underline{B}(0) \\
&\approx \frac{dB(1)}{d\alpha}(1 - 0) \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(A_C)}{\partial \underline{A}_j} \frac{\partial \underline{A}_j}{\partial \alpha} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial f(A_C)}{\partial \bar{A}_j} \frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \alpha} \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(A_C)}{\partial x_j} \frac{\partial (A_j - l_{A_j}(1 - \alpha))}{\partial \alpha} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial f(A_C)}{\partial x_j} \frac{\partial (A_j + r_{A_j}(1 - \alpha))}{\partial \alpha} \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(A_C)}{\partial x_j} r_j^{A_j} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial f(A_C)}{\partial x_j} l_j^{A_j}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
r_{BG} &= B(0) - B(1) \\
&\approx \frac{dB(1)}{d\alpha}(0 - 1) \\
&= - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(A_C)}{\partial \bar{A}_j} \frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \alpha} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial f(A_C)}{\partial \underline{A}_j} \frac{\partial \underline{A}_j}{\partial \alpha} \\
&= - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(A_C)}{\partial x_j} \frac{\partial (A_j + r_{A_j}(1 - \alpha))}{\partial \alpha} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial f(A_C)}{\partial x_j} \frac{\partial (A_j - l_{A_j}(1 - \alpha))}{\partial \alpha} \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(A_C)}{\partial x_j} r_j^{A_j} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial f(A_C)}{\partial x_j} l_j^{A_j}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

dimana  $A_C$  adalah vektor yang berisi inti-inti dari  $\tilde{A}_j, j = 1, 2, \dots, n$ , atau  $A_C = (A_1, A_2, \dots, A_n)$  dan  $l_{A_j}$  dan  $r_{A_j}$  adalah deviasi dari *fuzzy number*  $\tilde{A}_j$ . Dengan demikian, terbentuklah *fuzzy number* yang telah diaproksimasi dengan *gradient approach*,  $\tilde{B}^G = (B^G, l_{BG}, r_{BG})$  dengan  $B^G$  sebagai inti dari *fuzzy number*,  $l_{BG}$  sebagai deviasi dari inti terhadap nilai terkecil, dan  $r_{BG}$  sebagai deviasi dari inti terhadap nilai terbesar (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023).

- *Expected interval approach*

Pendekatan ini dibentuk dengan mengadaptasikan metode aproksimasi trapezoid oleh Grzegorzewski dan Mrówka (2005) dan Ban (2008) ke dalam bentuk *triangular*. Sesuai dengan *expected interval approach* pada bentuk trapezoid, aproksimasi  $\tilde{B}^{E'}$  menggunakan metode ini harus mempertahankan nilai  $EI(\tilde{B})$  dan meminim-

malisir jaraknya dengan  $\tilde{B}$ . Persamaan jaraknya yaitu,

$$d(B, \tilde{B}^{EI}) = \int_0^1 (B(\alpha) - \underline{B}^{EI}(\alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (\overline{B}(\alpha) - \overline{B}^{EI}(\alpha))^2 d\alpha \quad (2.31)$$

atau dengan kata lain meminimalkan persamaan berikut,

$$\int_0^1 (B(\alpha) - B^{EI} + l_{BEI}(1 - \alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (\overline{B}(\alpha) - B^{EI} - r_{BEI}(1 - \alpha))^2 d\alpha \quad (2.32)$$

dengan batasan-batasan berikut,

$$B^{EI} - \frac{l_{BEI}}{2} = \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha \quad (2.33)$$

$$B^{EI} + \frac{r_{BEI}}{2} = \int_0^1 \overline{B}(\alpha) d\alpha \quad (2.34)$$

$$l_A, r_A \geq 0 \quad (2.35)$$

yang bertujuan untuk mempertahankan *expected interval*  $EI(\tilde{B})$  dari persamaan (2.4), dan membatasi nilai  $l_A$  dan  $r_A$  yang bernilai non-negatif.

Untuk meminimalkan persamaan (2.32), akan digunakan metode pengali Lagrange (Bertsekas, 1982) yang mendefinisikan fungsi Lagrange sebagai berikut,

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^M \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_n) \quad (2.36)$$

dimana  $f(x_1, \dots, x_n)$  merupakan fungsi objektif dan  $g_k(x_1, \dots, x_n)$  merupakan fungsi-fungsi batasan yang telah dibentuk sedemikian rupa agar  $g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Dengan metode pengali Lagrange, solusinya didapatkan saat semua nilai turunan parsial fungsi Lagranganya bernilai 0, yaitu sebagai berikut,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_M} = 0$$

Pada kasus harga *life settlement*, maka fungsi Lagranganya menjadi,

$$\begin{aligned}
 L = & \int_0^1 (B(\alpha) - B^{EI} + I_{BEI}(1 - \alpha))^2 d\alpha + \int_0^1 (\overline{B}(\alpha) - B^{EI} - r_{BEI}(1 - \alpha))^2 d\alpha \\
 & + \lambda_1 \cdot B^{EI} - \frac{I_{BEI}}{2} - \int_0^1 B(\alpha) d\alpha + \lambda_2 \cdot B^{EI} + \frac{r_{BEI}}{2} - \int_0^1 \overline{B}(\alpha) d\alpha
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

dan dengan metode pengali Lagrange, didapatkan persamaan-persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial B^{EI}} &= 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial B^{EI}} &= -2 \int_0^1 (B(\alpha) - B^{EI} + I_{BEI}(1 - \alpha)) d\alpha \\
 &\quad - 2 \int_0^1 (\overline{B}(\alpha) - B^{EI} - r_{BEI}(1 - \alpha)) d\alpha + \lambda_1 + \lambda_2 \\
 &\Leftrightarrow -2 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 \overline{B}(\alpha) d\alpha + 4B^{EI} - I_{BEI} + r_{BEI} + \lambda_1 + \lambda_2 = 0
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial I_{BEI}} &= 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial I_{BEI}} &= 2 \int_0^1 (B(\alpha) - B^{EI} + I_{BEI}(1 - \alpha))(1 - \alpha) d\alpha - \frac{\lambda_1}{2} \\
 &\Leftrightarrow 2 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 \alpha \overline{B}(\alpha) d\alpha - B^{EI} + \frac{2I_{BEI}}{3} - \frac{\lambda_1}{2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \lambda_1 = 4 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha - \int_0^1 \alpha \overline{B}(\alpha) d\alpha - 2B^{EI} + \frac{4I_{BEI}}{3}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial r_{BEI}} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial r_{BEI}} &= -2 \int_0^1 (B(\alpha) - B^{EI} - r_{BEI}(1 - \alpha))(1 - \alpha) d\alpha + \frac{\lambda_2}{2} \\
&\Leftrightarrow -2 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha + 2 \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha + B^{EI} + \frac{2r_{BEI}}{3} + \frac{\lambda_2}{2} = 0 \quad (2.40) \\
&\Leftrightarrow \lambda_2 = 4 \left[ \int_0^1 B(\alpha) d\alpha - \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - 2B^{EI} - \frac{4r_{BEI}}{3} \right]
\end{aligned}$$

Untuk turunan parsial terhadap  $\lambda$ , yakni  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0$  dan  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$ , didapatkan persamaan (2.33) dan (2.34). Selanjutnya, substitusikan persamaan (2.39) dan (2.40) ke persamaan (2.38), lalu substitusikan persamaan (2.33) dan (2.34), maka didapatkan persamaan,

$$\begin{aligned}
\frac{l_{BEI}}{3} - \frac{r_{BEI}}{3} &= \\
4 \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha + 4 \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha &\quad (2.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{l_{BEI}}{2} - \frac{r_{BEI}}{2} &= \\
6 \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - 3 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha + 6 \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - 3 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha &\quad (2.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 2B^{EI} - \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha &= \\
6 \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - 3 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha + 6 \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - 3 \int_0^1 B(\alpha) d\alpha &\quad (2.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow B^{EI} = 3 \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - \int_0^1 B(\alpha) d\alpha + 3 \int_0^1 \alpha B(\alpha) d\alpha - \int_0^1 B(\alpha) d\alpha &\quad (2.44)
\end{aligned}$$

Dengan substitusi persamaan (2.33) dan (2.34), maka didapatkan persamaan untuk  $I_{BEI}$  dan  $r_{BEI}$ , yaitu :

$$I_{BEI} = -4 \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha + 6 \int_0^1 \alpha \underline{B}(\alpha) d\alpha + 6 \int_0^1 \overline{\alpha B}(\alpha) d\alpha \quad (2.45)$$

$$r_{BEI} = 2 \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha + 4 \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha - 6 \int_0^1 \alpha \underline{B}(\alpha) d\alpha - 6 \int_0^1 \overline{\alpha B}(\alpha) d\alpha \quad (2.46)$$

Mengingat batasan di persamaan (2.35), maka didapat persamaan untuk  $B^{EI}$ ,  $I_{BEI}$ , dan  $r_{BEI}$  pada kasus lain yaitu, jika,

$$2 \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \overline{B}(\alpha) d\alpha > 3 \int_0^1 \alpha \underline{B}(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \overline{\alpha B}(\alpha) d\alpha ,$$

atau  $I_{BEI} < 0$ , maka akan ditentukan nilai  $I_{BEI} = 0$  agar memenuhi batasan di persamaan (2.35), dan persamaan lainnya menjadi :

$$B^{EI} = \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha \quad (2.47)$$

$$I_{BEI} = 0 \quad (2.48)$$

$$r_{BEI} = 2 \int_0^1 \overline{B}(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha \quad (2.49)$$

dan juga pada kasus lain, jika,

$$3 \int_0^1 \alpha \underline{B}(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \overline{\alpha B}(\alpha) d\alpha > \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha + 2 \int_0^1 \overline{B}(\alpha) d\alpha,$$

atau  $r_{BEI} < 0$ , maka akan ditentukan nilai  $r_{BEI} = 0$  agar memenuhi batasan di persamaan (2.35), dan persamaan lainnya menjadi :

$$B^{EI} = \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha \quad (2.50)$$

$$I_{BEI} = 2 \int_0^1 \overline{B}(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 \underline{B}(\alpha) d\alpha \quad (2.51)$$

$$r_{BEI} = 0 \quad (2.52)$$

Dengan demikian, terbentuklah *fuzzy number* yang telah diaproksimasi dengan *expected interval approach*,  $\tilde{B}^{EI} = (B^{EI}, l_{BEI}, r_{BEI})$  dengan  $B^{EI}$  sebagai inti dari *fuzzy number*,  $l_{BEI}$  sebagai deviasi dari inti terhadap nilai terkecil, dan  $r_{BEI}$  sebagai deviasi dari inti terhadap nilai terbesar (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023).

## 2.5 Teori Dasar dan Notasi dalam Ilmu Aktuaria

Pada skripsi ini, karena topik utama yang dibicarakan adalah mengenai perhitungan harga yang berhubungan dengan asuransi, perlu dipahami terlebih dahulu dasar-dasar dan notasi pada ilmu aktuaria.

### 2.5.1 Variabel Acak Sisa Hidup

Pada saat perusahaan asuransi menerbitkan sebuah polis asuransi, tentu saja waktu kematian dari pemegang polis tidak dapat diketahui dengan pasti, sehingga perusahaan asuransi tidak tahu secara pasti kapan manfaat kematian akan dibayarkan. Untuk mengestimasi waktu pembayaran manfaat, perusahaan asuransi memerlukan model dari kematian manusia yang dapat menghitung kemungkinan terjadinya kematian pada usia tertentu.

Misal  $(x)$  menotasikan seorang individu berusia  $x$  tahun,  $x \geq 0$ . Kematian dari  $(x)$  dapat terjadi kapanpun pada usia yang lebih besar dari  $x$ . Sisa masa hidup dari  $x$  dimodelkan dengan variabel acak kontinu  $T_x$ , sehingga  $x+T_x$  merepresentasikan variabel acak usia saat kematian dari  $(x)$ . (Dickson, dkk, 2019)

Dalam ilmu aktuaria, fungsi distribusi untuk  $T_x$  dinotasikan sebagai  ${}_tq_x$ . Selain itu, terdapat notasi-notasi lain yang sering digunakan dalam ilmu aktuaria. Berikut definisi-definisi dari notasi aktuaria yang sering digunakan :

$${}_tq_x = Pr[T_x \leq t] \quad (2.53)$$

$${}_tp_x = Pr[T_x > t] = 1 - {}_tq_x \quad (2.54)$$

$${}_s|_tq_x = Pr[s \leq T_x < s + t] = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+s} \quad (2.55)$$

$$\bar{e}_x = E[T_x] = \int_0^{\infty} {}_tp_x dt \quad (2.56)$$

${}_tq_x$  dapat diartikan sebagai peluang  $(x)$  akan meninggal dalam  $t$  tahun ke depan.  ${}_tp_x$  dapat diartikan sebagai peluang  $(x)$  akan tetap bertahan hidup dalam  $t$  tahun ke depan.  ${}_s|_tq_x$  dapat diartikan sebagai peluang  $(x)$  akan tetap bertahan hidup selama  $s$  tahun ke depan

namun meninggal dalam  $t$  tahun setelah  $s$  tahun tersebut.  $e_x$  merupakan ekspektasi dari sisa masa hidup ( $x$ ). Dalam notasi aktuarial, variabel  $t$  biasanya tidak ditulis apabila  $t$  bernilai 1. (Dickson, dkk, 2019).

Peluang ( $x + s$ ) dapat hidup hingga  $t$  tahun ke depan dapat ditulis kembali sebagai peluang ( $x$ ) dapat hidup hingga  $x + s$  tahun ke depan bersyarat individu tersebut dapat hidup untuk  $s$  tahun pertamanya, atau secara matematis dapat ditulis sebagai,

$$Pr[T_{x+s} > t] = Pr[T_x > s + t | T_x > s] \quad (2.57)$$

Dalam notasi aktuarial, persamaan (2.57) dapat ditulis kembali sebagai,

$${}_t p_{x+s} = \frac{{}_{s+t} p_x}{{}_s p_x} \quad (2.58)$$

$${}_{s+t} p_x = {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s} \quad (2.59)$$

Dari persamaan (2.59), dapat diinterpretasikan bahwa peluang ( $x$ ) bertahan hidup hingga  $s + t$  tahun ke depan adalah peluang ( $x$ ) bertahan hidup hingga  $s$  tahun pertama dikali dengan peluang ( $x + s$ ) untuk bertahan hidup hingga  $t$  tahun sisanya. Apabila digunakan  $s = 1$ , maka persamaannya dapat diuraikan lebih lanjut dan membentuk persamaan dekomposisi berantai menjadi,

$$\begin{aligned} {}_{t+1} p_x &= p_x \cdot {}_t p_{x+1} \\ &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot {}_{t-1} p_{x+2} \\ &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot {}_{t-2} p_{x+3} \\ &\cdot \\ &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot p_{x+3} \cdot \dots \cdot p_{x+t} \end{aligned} \quad (2.60)$$

## 2.5.2 Perhitungan Premi Polis Asuransi

Untuk menghitung besar premi dalam sebuah polis asuransi, secara sederhana terdapat dua macam pembayaran yang diperhitungkan yakni pembayaran premi oleh pemegang polis dan pembayaran manfaat oleh perusahaan asuransi. Untuk menghitung besar premi dasar yang perlu dibayarkan pemegang polis, dapat digunakan prinsip ekuivalensi yang berarti ekspektasi nilai sekarang dari premi-premi yang akan dibayar pemegang polis akan sama dengan ekspektasi nilai sekarang dari manfaat yang akan diterima pemegang polis. Perhitungan ekspektasi nilai sekarang dari pembayaran-pembayaran berikut memperhitungkan probabilitas terjadinya masing-masing pembayaran.

Sebagai contoh, secara matematis, prinsip ekuivalensi dari sebuah polis asuransi yang pembayarannya manfaatnya hanya terjadi di akhir tahun kematian dan pembayaran preminya terjadi di setiap awal tahun selama pemegang polis masih hidup, dapat ditunjukkan dengan persamaan berikut :

$$\sum_{t=1}^{\omega-x_0} C_{x_0+t} \cdot (1+i_0)^{-t} {}_{t-1|}q_{x_0} = \sum_{t=0}^{\omega-x_0} P_{x_0+t} \cdot (1+i_0)^{-t} p_{x_0} \quad (2.61)$$

dimana  $x_0$  adalah usia pemegang polis saat polis diterbitkan,  $\omega$  adalah batas usia maksimum sesuai tabel mortalitas,  $C_{x_0+t}$  adalah manfaat kematian yang dibayarkan pada usia  $x_0+t$ , dan  $P_{x_0+t}$  adalah premi yang dibayarkan pada usia  $x_0+t$ . Ekspektasi nilai sekarang dari pembayaran manfaat merupakan jumlahan dari besar manfaat dikali faktor diskonto dan peluang pemegang polis meninggal pada masing-masing tahun sedangkan ekspektasi nilai sekarang dari pembayaran premi merupakan jumlahan dari besar premi dikali faktor diskonto dan peluang pemegang polis masih hidup pada masing-masing tahun untuk membayar premi. Faktor diskonto,  $(1+i_0)^{-t}$ , merupakan faktor pengali yang berguna menghitung nilai sekarang (*present value*) dari arus kas di masa depan (Dickson, dkk, 2019). Tingkat bunga awal,  $i_0$ , sering disebut sebagai tingkat bunga teknis. Nilainya ditentukan berdasarkan kemampuan perusahaan asuransi untuk mendapatkan keuntungan dengan berinvestasi ke berbagai aset. Umumnya aset-aset tersebut memiliki risiko rendah seperti obligasi pemerintah sehingga  $i_0$  dapat disebut representasi dari tingkat bunga bebas risiko. Untuk penentuan harga, diasumsikan juga bahwa tertanggung memiliki ekspektasi sisa masa hidup yang sesuai dengan tabel mortalitas (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023). Premi yang dihitung berdasarkan prinsip ekuivalensi biasa disebut premi dasar yang belum memperhitungkan keuntungan yang diambil perusahaan asuransi maupun biaya lain yang dikeluarkan perusahaan asuransi.

Untuk menyederhanakan persamaan tersebut, didefinisikan notasi aktuarial untuk ekspektasi dari nilai sekarang pembayaran-pembayaran manfaat dan premi. Untuk sebuah polis asuransi seumur hidup bagi individu berusia  $x$  tahun dengan pembayaran manfaat sebesar 1 di akhir tahun kematian, ekspektasi nilai sekarang dari manfaat yang akan dibayarkan dinotasikan sebagai  $A_x$ . Dapat ditunjukkan bahwa ekspektasi nilai sekarangnya adalah

$$A_x = \sum_{t=1}^{\infty} (1+i_0)^{-t} {}_{t-1|}q_x \quad (2.62)$$

Selain pembayaran manfaat asuransi, nilai sekarang dari pembayaran premi tahunan sebe-

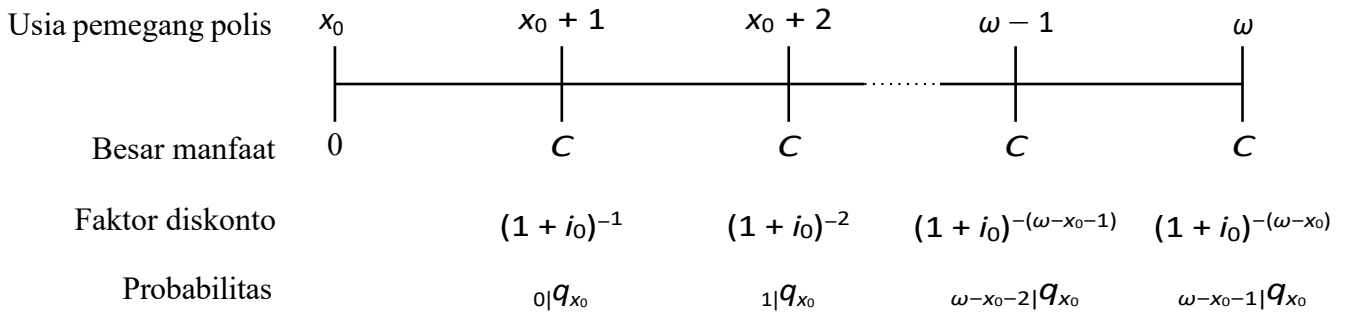
sar 1 di awal setiap tahun untuk individu berusia  $x$  tahun juga memiliki nilai ekspektasinya, dinotasikan  $\ddot{a}_x$ , yaitu

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} (1 + i_0)^{-t} p_x \tag{2.63}$$

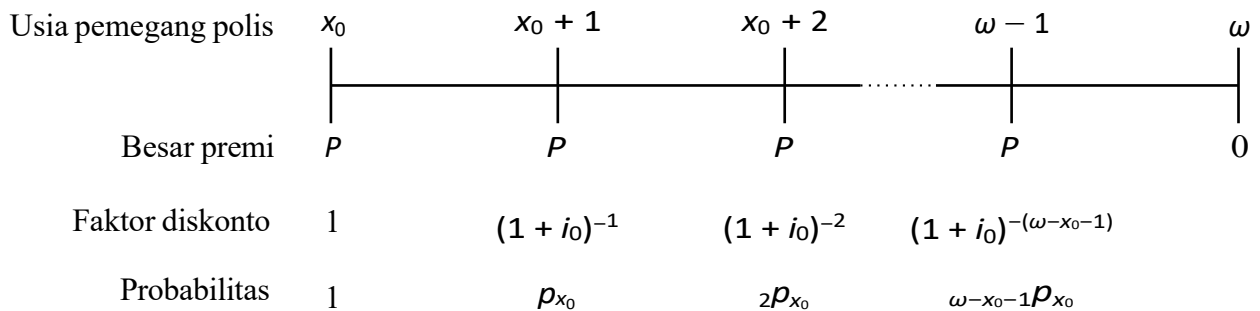
Sehingga apabila besar manfaat dan premi dianggap konstan terhadap waktu, sebesar  $C$  dan  $P$ , prinsip ekuivalensi pada persamaan 2.61 untuk individu yang saat ini berusia  $x$  tahun apat ditulis kembali menjadi

$$C \cdot A_x = P \cdot \ddot{a}_x \tag{2.64}$$

Berikut gambar diagram waktu dari pembayaran premi dan pembayaran manfaat pada persamaan (2.62) dan (2.63) (Dickson, dkk, 2019)



Gambar 2.2: Diagram waktu pembayaran manfaat kematian asuransi seumur hidup untuk individu berusia  $x_0$  tahun



Gambar 2.3: Diagram waktu pembayaran premi asuransi anuitas seumur hidup untuk individu berusia  $x_0$  tahun

## 2.6 Kaidah Simpson

Pada penelitian ini, terdapat beberapa perhitungan yang melibatkan integral yang hasilnya sulit untuk diperoleh secara analitik. Maka dari itu, diperlukan pendekatan numerik untuk melakukan kalkulasi integral tersebut. Salah satu cara tertua dan populer yang sering digunakan dalam mengaproksimasi integral dengan metode numerik adalah kaidah Simpson. (Atkinson dan Han, 2004)

Pada hakikatnya, kaidah Simpson melakukan interpolasi kuadratik untuk mengaproksimasi fungsi yang akan diintegrasikan pada interval tertentu. Misal fungsi akan diintegrasikan pada interval  $[a, b]$  dan  $P_2(x)$  adalah polinomial kuadratik yang menginterpolasikan  $f(x)$  di titik  $a, b$ , dan  $c = \frac{a+b}{2}$ . Secara matematis, kaidah Simpson memiliki persamaan sebagai berikut,

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \int_a^b \left[ \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) \right] dx \quad (2.65)$$

Persamaan (2.65) dapat disederhanakan menjadi,

$$I(f) \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f(c) + f(b)] \quad (2.66)$$

dengan  $h = \frac{b-a}{2}$  merupakan setengah lebar interval.

Apabila  $f(x)$  fluktuatif pada interval integrasinya, akan lebih akurat apabila interval tersebut dipartisi menjadi subinterval yang lebih kecil dan kaidah Simpson diterapkan ke masing-masing subinterval. Misal interval integrasi dibagi menjadi  $\frac{n}{2}$  subinterval dimana  $n$  merupakan bilangan asli genap, maka polinomial kuadratik yang digunakan akan menginterpolasikan  $f(x)$  di titik-titik  $x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \dots, n$ , dengan  $h = \frac{b-a}{n}$ . Pendekatan ini dinamakan kaidah Simpson komposit. Interval  $[a, b] = [x_0, x_n]$  dapat dipartisi menjadi subinterval sehingga menjadi,

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \quad (2.67)$$

dan dengan menerapkan persamaan (2.65) dan (2.66), persamaan pendekatan numerik untuk mengevaluasi integral tersebut menjadi,

$$I(f) \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots + \frac{h}{3} [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (2.68)$$

atau dapat disederhanakan menjadi,

$$I(f) \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right] \quad (2.69)$$

## BAB 3

### PENENTUAN HARGA *LIFE SETTLEMENT*

Pada bab ini, pembahasan diawali dengan memperkenalkan istilah *life settlement* dan cara perhitungan harganya dengan menggunakan parameter pasti. Kemudian, pembahasan dilanjutkan dengan memformulasikan cara perhitungan harga *life settlement* dengan metode *fuzzy* yang dilanjutkan dengan melakukan aproksimasi *triangular* pada harga tersebut agar lebih mudah untuk diinterpretasikan.

#### 3.1 *Life Settlement* sebagai Pasar Sekunder Polis Asuransi Jiwa

*Life settlement* merupakan sebuah transaksi produk polis asuransi jiwa yang telah dibeli. Pada awalnya, polis asuransi jiwa dikeluarkan oleh perusahaan asuransi jiwa dan dibeli oleh pemegang polis. Kemudian, setelah memegang polis tersebut untuk sekian waktu, selama polis masih aktif, pemegang polis dapat menjual polis asuransi jiwanya ke investor, yaitu sebesar harga *life settlement*, yang umumnya dengan harga lebih tinggi dari nilai *surrender value*-nya. Setelah polis dijual, premi akan dibayarkan oleh investor selama pemegang polis asalnya masih hidup. Akan tetapi, saat pemegang polis asalnya meninggal dunia, maka investor yang akan berhak untuk memperoleh manfaat kematiannya dari perusahaan asuransi. Tentunya sebuah produk *life settlement* akan memperhitungkan nilai sekarang aktuarial (nilai sekarang yang memperhitungkan probabilitas terjadinya pembayaran) dari pembayaran premi serta manfaat kematiannya (Aalaei, 2022). Dalam penentuan harga *life settlement*, parameter tingkat bunga dan tingkat mortalitas yang akan digunakan dapat dianggap sebagai sebuah parameter pasti (bernilai eksak) ataupun sebuah parameter tidak pasti (mengandung ketidakpastian). Parameter tidak pasti muncul disebabkan kurangnya informasi, atau terdapat informasi yang berbeda-beda dari berbagai sumber.

#### 3.2 Penentuan Harga *Life Settlement* dengan Parameter Pasti

Sebelumnya, persamaan-persamaan pada subbab 2.5 mengimplikasikan bahwa premi polis asuransi jiwa dihitung dengan menggunakan tingkat kematian dari tabel mortalitas. Sedangkan untuk menentukan harga *life settlement*, meskipun masih mengamati mortalitas dari individu yang sama, umumnya aktuaris menggunakan tingkat kematian yang telah disesuaikan. Probabilitas kematian yang digunakan untuk menghitung premi polis akan berbeda dengan probabilitas kematian yang digunakan untuk menghitung harga *life*

*settlement*. Probabilitas tersebut disesuaikan dengan usia tertanggung serta kondisi kesehatan dan kebiasaan hidup tertanggung pada saat ingin menjual polis asuransi jiwanya berdasarkan asesmen dari *medical underwriter*. Seringkali, probabilitas kematian dalam satu tahun ke depan untuk individu berusia  $x$  tahun yang telah disesuaikan,  $q_x^*$ , merupakan hasil transformasi linier dari  $q_x$  yang merupakan probabilitas kematian untuk individu yang sama dari tabel mortalitas atau hasil transformasi linier dari tingkat mortalitas (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023). Cara yang paling umum dipakai untuk menghitung  $q_x^*$  adalah dengan menggunakan *mortality multiplier*  $\beta > 0$  yaitu mendefinisikan persamaan

$$q_x^* = \min\{1, \beta \cdot q_x\} \quad (3.1)$$

Dengan disesuaikannya probabilitas individu meninggal, hal tersebut mengakibatkan terjadinya penyesuaian-penyesuaian lain seperti probabilitas individu yang berusia  $x$  tahun saat ini dapat bertahan hidup untuk  $t$  tahun ke depan, dinotasikan  ${}_t p_x^*$  berdasarkan persamaan (2.60),

$${}_t p_x^* = \prod_{j=0}^{t-1} (1 - q_{x+j}^*) = \prod_{j=0}^{t-1} (1 - \min\{1, \beta \cdot q_{x+j}\}) \quad (3.2)$$

dan juga probabilitas individu yang saat ini berusia  $x$  tahun akan meninggal di antara  $t - 1$  dan  $t$  tahun ke depan, dinotasikan  ${}_t q_x^*$  berdasarkan persamaan (2.55),

$${}_t q_x^* = q_{x+t}^* \cdot {}_t p_x^* = \min\{1, \beta \cdot q_{x+t}\} \cdot \prod_{j=0}^{t-1} (1 - \min\{1, \beta \cdot q_{x+j}\}) \quad (3.3)$$

Ketika polis asuransi jiwa sudah aktif, pemegang polis dianggap memiliki aset berupa polis yang dapat diberi harga di pasar *life settlement*. Akan tetapi, tingkat bunga yang digunakan untuk memberi harga polis tersebut sudah berbeda dari yang digunakan di awal. Tingkat bunga yang digunakan mencakup berbagai risiko yang termasuk pada transaksi *life settlement* seperti risiko likuiditas, risiko bias evaluasi ekspektasi sisa masa hidup, *longevity risk*, dan risiko kredit dari tertanggung (Braun dan Xu (2020)). Tentunya dengan risiko yang lebih tinggi, investor perlu tingkat *return* yang lebih tinggi. Akibatnya, tingkat bunga yang digunakan saat penentuan harga *life settlement* lebih tinggi dari tingkat bunga teknis dari perusahaan asuransi. Saat probabilitas kematian sudah disesuaikan dan tingkat bunga sudah ditentukan oleh pihak yang terkait, investor dan broker dapat mulai mengestimasi nilai ekonomis / harga dari *life settlement*.

Seperti yang telah dijelaskan di Bab 1, terdapat beberapa pendekatan untuk menilai *life settlement*. Untuk metode yang paling sering dipakai, metode probabilistik, akan dihitung semua premi dan manfaat menggunakan matematika aktuaria konvensional sebagai dasarnya, yaitu persamaan (2.62) dan (2.63). Maka dari itu, harga probabilistik dari *life settlement* untuk individu yang ingin menjual polis asuransi jiwanya pada usia  $x$  tahun,  $PLS_x \geq 0$ , adalah

$$PLS_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} C_{x+t} \cdot (1+i)^{-t} {}_{t-1|}q_x^* - \sum_{t=1}^{\omega-x} P_{x+t} \cdot (1+i)^{-t} {}_t p_x^* \quad (3.4)$$

Formula tersebut memiliki bentuk yang serupa dengan prinsip ekuivalensi pada persamaan (2.61). Akan tetapi, terdapat beberapa perbedaan antara menghitung harga *life settlement* dan menghitung premi dengan prinsip ekuivalensi. Pertama, perhitungan premi dengan prinsip ekuivalensi menggunakan nilai sekarang aktuaria saat pemegang polis baru membeli polis, misal berusia  $x_0$  tahun, sedangkan perhitungan harga *life settlement* mengevaluasi nilai sekarang aktuaria saat polis ingin dijual, misal berusia  $x$  tahun. Selain itu, seperti yang telah dijelaskan, tingkat bunga yang digunakan untuk faktor diskonto pada perhitungan harga *life settlement*,  $i$ , lebih tinggi dari tingkat bunga awal untuk prinsip ekuivalensi,  $i_0$ . Untuk *life settlement*, premi yang diperhitungkan dimulai dari awal tahun setelah transaksi *life settlement*, diasumsikan premi di awal tahun transaksi *life settlement* telah dibayarkan oleh pemegang polis. Pada hakikatnya, perhitungan harga *life settlement* sama dengan menghitung nilai polis dari sudut pandang pemegang polis yakni nilai sekarang aktuaria dari pemasukan (manfaat kematian) dikurang nilai sekarang aktuaria dari pengeluaran (premi yang dibayarkan).

Untuk menyederhanakan analisisnya, akan diasumsikan bahwa arus kas di masa depan bersifat konstan (Brockett, dkk, 2013), sehingga  $P_{x+t} = P$ ;  $C_{x+t} = C$  untuk setiap  $x$  dan  $t$ . Maka dari itu, dari persamaan (3.2) dan (3.3), persamaan (3.4) dapat ditulis kembali menjadi

$$PLS_x = C \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i)^{-t} \cdot q_{x+t-1}^* \prod_{j=0}^{t-2} (1 - q_{x+j-1}^*) - P \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i)^{-t} \prod_{j=0}^{t-1} (1 - q_{x+j-1}^*) \quad (3.5)$$

Untuk menyederhanakan persamaan (3.4), didefinisikan notasi aktuaria untuk ekspektasi dari nilai sekarang pembayaran-pembayaran manfaat dan premi pada kontrak *life settlement*. Serupa dengan persamaan (2.62), untuk sebuah *life settlement* seumur hidup dengan pembayaran manfaat sebesar 1 di akhir tahun kematian, ekspektasi nilai sekarang

dari manfaat yang akan dibayarkan dinotasikan sebagai  $A_x^*$ . Dapat ditunjukkan bahwa ekspektasi nilai sekarangnya adalah

$$A_x^* = \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i)^{-t} {}_{t-1|}q_x^* \tag{3.6}$$

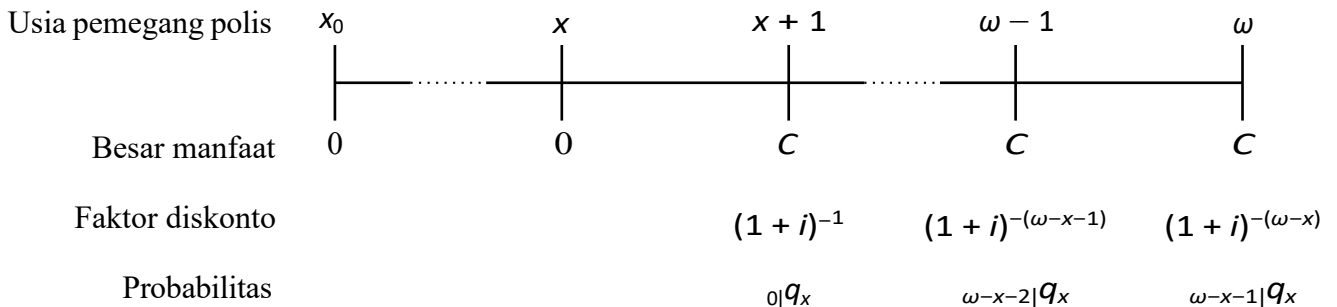
Selain pembayaran manfaat kematian, nilai sekarang dari pembayaran premi tahunan sebesar 1 di awal setiap tahun setelah transaksi *life settlement* juga memiliki nilai ekspektasinya, dinotasikan  $a_x^*$ , yaitu

$$a_x^* = \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i)^{-t} {}_t p_x^* \tag{3.7}$$

Maka dengan persamaan (3.6) dan (3.7) dengan asumsi pembayaran manfaat dan premi konstan, persamaan (3.4) dapat ditulis kembali menjadi

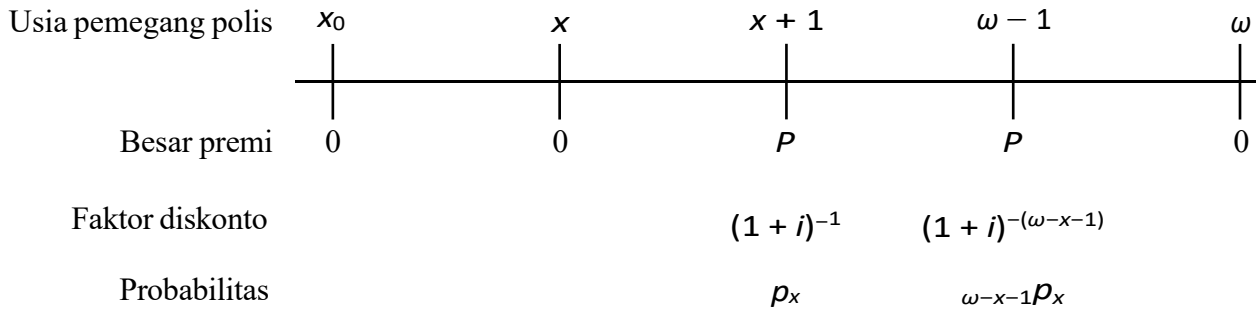
$$PLS_x = C \cdot A_x^* - P \cdot a_x^* \tag{3.8}$$

Berikut gambar diagram waktu dari pembayaran premi dan pembayaran manfaat untuk *life settlement* pada persamaan (3.6) dan (3.7) (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023).



Gambar 3.1: Diagram waktu pembayaran manfaat kematian pada *life settlement* untuk pemegang polis yang menjual polisnya di usia  $x$  tahun

Produk *life settlement* yang dipasarkan pada pasar sekunder memiliki informasi yang terbatas dan tidak pasti. Informasi tingkat bunga yang akan digunakan investor akan berbeda-beda tergantung penilaian terhadap risiko dari *life settlement* dan informasi *mortality multiplier* dari *medical underwriter* yang berbeda juga belum tentu sama. Maka dari itu, diperlukan metode *fuzzy* yang dapat memodelkan ketidakpastian tersebut.



Gambar 3.2: Diagram waktu pembayaran premi pada *life settlement* untuk pemegang polis yang menjual polisnya di usia  $x$  tahun

### 3.3 Penentuan Harga *Life Settlement* dengan Parameter *Fuzzy*

Pada penelitian ini, variabel tingkat bunga dan *mortality multiplier* direpresentasikan menggunakan *triangular fuzzy number*. Perbedaan sudut pandang dari masing-masing investor dan *medical underwriter* dalam menilai risiko dari transaksi *life settlement* dan tingkat kematian dari tertanggung menyebabkan variabel-variabel tersebut dianggap memiliki ketidakpastian tergantung asumsi dari masing-masing investor dan *medical underwriter*. Dengan menggunakan *triangular fuzzy number* dari bab 2.2, ketidakpastian dari nilai variabel-variabel tersebut dapat diperhitungkan dalam menghitung harga *life settlement*.

Misalkan *mortality multiplier* dimodelkan dengan TFN  $\tilde{\beta} = (\beta, l_\beta, r_\beta)$  dan tingkat bunga dimodelkan dengan TFN  $\tilde{i} = (i, l_i, r_i)$ . Berdasarkan persamaan (2.2), masing-masing memiliki  $\alpha$ -cuts,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ , sebagai berikut,

$$\beta_\alpha = \underline{\beta}(\alpha), \overline{\beta}(\alpha) = [\beta - l_\beta(1 - \alpha), \beta + r_\beta(1 - \alpha)] \tag{3.9}$$

$$i_\alpha = \underline{i}(\alpha), \overline{i}(\alpha) = [i - l_i(1 - \alpha), i + r_i(1 - \alpha)] \tag{3.10}$$

Dengan menggunakan TFN  $\tilde{\beta}$ , dapat dirumuskan probabilitas kematian dari persamaan (3.1) dengan TFN  $q_x^*$ . Fungsi probabilitas kematian tersebut merupakan fungsi naik terhadap  $\beta$  dan merupakan fungsi yang linier. Maka dari itu, berdasarkan persamaan (2.7) dan (2.6), dapat dibentuk TFN  $q_x^*$  yang memiliki  $\alpha$ -cut yaitu,

$$q_{x\alpha}^* = \underset{h}{q_x^*(\alpha)}, \overline{q_x^*(\alpha)} \underset{i}{=} [\min\{1, [\beta - l_\beta(1 - \alpha)] \cdot q_x\}, \min\{1, [\beta + r_\beta(1 - \alpha)] \cdot q_x\}] \tag{3.11}$$

Berdasarkan persamaan (3.4), yaitu  $PLS_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} C_{x+t} \cdot (1 + i)^{-t} {}_{t-1|}q_x^* - \sum_{t=1}^{\omega-x} P_{x+t} \cdot (1 + i)^{-t} p_x^*$ , dapat dilihat bahwa harga *life settlement* merupakan fungsi

dari tingkat bunga dan peluang kematian. Dapat diperhatikan bahwa harga *life settlement* merupakan fungsi naik terhadap *mortality multiplier* karena semakin tinggi *mortality multiplier*, maka probabilitas individu akan meninggal akan semakin tinggi pada tahun-tahun yang lebih awal mengakibatkan nilai sekarang aktuarial dari pembayaran manfaat meningkat dan nilai sekarang aktuarial dari pembayaran premi menurun. Selain itu, dapat diperhatikan bahwa harga *life settlement* pada persamaan (3.4) merupakan fungsi turun terhadap tingkat bunga karena semakin tinggi tingkat bunga, maka faktor diskonto akan semakin kecil yang menyebabkan harga *life settlement* semakin kecil. Maka dari itu, dengan menggunakan  $\tilde{q}_x^*$  dan  $\tilde{i}$ , dapat ditentukan rumus untuk harga *fuzzy* dari *life settlement* yaitu  $P \tilde{L} S_x$  yang memiliki  $\alpha$ -cut  $PLS_{x_\alpha} = \underline{PLS}_x(\alpha), \overline{PLS}_x(\alpha)$ . Berdasarkan persamaan (2.6) dan (2.7), didapatkan persamaan harga *fuzzy* dari *life settlement*, yaitu

$$\begin{aligned} \underline{PLS}_x(\alpha) &= C \sum_{t=1}^{\omega-x} (1 + \tilde{i}(\alpha))^{-t} \prod_{k=0}^{t-2} (1 - \tilde{q}_{x+k-1}^*(\alpha)) \cdot \tilde{q}_{x+k-1}^*(\alpha) - \\ P &\sum_{t=1}^{\omega-x} (1 + \tilde{i}(\alpha))^{-t} \prod_{k=0}^{t-2} (1 - \tilde{q}_{x+k-1}^*(\alpha)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \overline{PLS}_x(\alpha) &= C \sum_{t=1}^{\omega-x} (1 + \tilde{i}(\alpha))^{-t} \prod_{k=0}^{t-2} (1 - \tilde{q}_{x+k-1}^*(\alpha)) \cdot \tilde{q}_{x+k-1}^*(\alpha) - \\ P &\sum_{t=1}^{\omega-x} (1 + \tilde{i}(\alpha))^{-t} \prod_{k=0}^{t-2} (1 - \tilde{q}_{x+k-1}^*(\alpha)) \end{aligned} \tag{3.13}$$

(De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023).

Sesuai dengan penjelasan di subbab 2.4, karena fungsi harga *life settlement* bukanlah fungsi linier, maka hasil *fuzzy number*-nya sudah bukan lagi merupakan TFN. Maka dari itu, agar interpretasi dapat menjadi lebih sederhana, akan digunakan aproksimasi-aproksimasi yang telah dibahas pada subbab 2.4 untuk membentuk TFN untuk harga *life settlement*.

### 3.4 Aproksimasi *Triangular* pada Perhitungan Harga *Life Settlement*

Selanjutnya, akan digunakan tiga aproksimasi *triangular* untuk menghitung harga *life settlement* dengan metode *fuzzy*. Dengan mengikuti metode yang dijelaskan di bab 2.4, tiga alternatif nilai aproksimasi dari harga *life settlement*,  $P \tilde{L} S_x$ , dapat diperoleh.

### 3.4.1 Aproksimasi dengan *Secant Approach* pada Perhitungan Harga *Life Settlement*

Pendekatan ini mempertahankan nilai inti dan *support* dari  $\tilde{P}LS_x$  yang dibentuk di bab 3.3. TFN dari *secant approach*,  $\tilde{P}LS_x^S = (PLS_x^S, l_{PLSS_x}, r_{PLSS_x})$ , dapat dimodelkan dengan persamaan-persamaan (2.23), (2.24), (2.25), (3.14), dan (3.13). Pendekatan ini membuat bentuk *triangular* pada  $\tilde{P}LS_x$  dengan menggunakan garis *secant* yang menghubungkan batas bawah *0-cut* dan *1-cut*, yaitu  $\underline{PLS}(0)$  dan  $\underline{PLS}(1)$ , dan juga batas atas dari kedua  $\alpha$ -*cut* tersebut, yaitu  $\overline{PLS}(0)$  dan  $\overline{PLS}(1)$ . Pada hakikatnya metode pendekatan *secant* ini hanya perlu melihat nilai yang paling dapat dipercaya (*1-cut*), serta skenario pesimis ( $\underline{PLS}(0)$ ) dan skenario optimis ( $\overline{PLS}(0)$ ). Berikut formula dari parameter TFN *life settlement* dengan *secant approach*, yaitu :

$$PLS_x^S = C \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i)^{-t} \sum_{k=0}^{t-2} Y_{t-k} (1 - \min\{1, \beta \cdot q_{x+k-1}\}) \cdot \min\{1, \beta \cdot q_{x+t-1}\} - P \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i)^{-t} \sum_{k=0}^{t-1} Y_{t-k} (1 - \min\{1, \beta \cdot q_{x+k-1}\}) \quad (3.14)$$

$$l_{PLS_x^S} = PLS_x^S - \frac{PLS_x(0)}{\omega-x} = PLS_x^{\bar{}} - C \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i+r_i)^{-t} \sum_{k=0}^{t-2} Y_{t-k} [1 - \min\{1, (\beta - l\beta) \cdot q_{x+k-1}\}] \cdot \min\{1, (\beta - l\beta) \cdot q_{x+t-1}\} + P \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i+r_i)^{-t} \sum_{k=0}^{t-1} Y_{t-k} [1 - \min\{1, (\beta - l\beta) \cdot q_{x+k-1}\}] \quad (3.15)$$

$$r_{PLS_x^S} = \overline{PLS_x(0)} - PLS_x^S = C \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i-l_i)^{-t} \sum_{k=0}^{t-2} Y_{t-k} [1 - \min\{1, (\beta + r\beta) \cdot q_{x+k-1}\}] \cdot \min\{1, (\beta + r\beta) \cdot q_{x+t-1}\} - P \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i-l_i)^{-t} \sum_{k=0}^{t-1} Y_{t-k} [1 - \min\{1, (\beta - l\beta) \cdot q_{x+k-1}\}] - PLS_x^{\bar{}} \quad (3.16)$$

Aproksimasi dengan *secant approach* menghasilkan *fuzzy number* harga *life settlement* yang sudah berupa TFN,  $\tilde{P}LS_x^S = (PLS_x^S, l_{PLSS_x}, r_{PLSS_x})$ , dengan fungsi keanggotaan

dan  $\alpha$ -cut serupa dengan persamaan (2.1) dan (2.2) yaitu :

$$\mu_{\tilde{P}LS_x^S}(x) = \begin{cases} \frac{x - PLS_x^S + I_{PLS_x^S}}{I_{PLS_x^S}}, & PLS_x^S - I_{PLS_x^S} < x \leq PLS_x^S \\ \frac{PLS_x^S + r_{PLS_x^S} - x}{r_{PLS_x^S}}, & PLS_x^S < x \leq PLS_x^S + r_{PLS_x^S} \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} (PLS_x^S)_\alpha &= \left[ \frac{h}{PLS_x^S(\alpha)}, \frac{i}{PLS_x^S(\alpha)} \right] \\ &= [PLS_x^S - I_{PLS_x^S}(1 - \alpha), PLS_x^S + r_{PLS_x^S}(1 - \alpha)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.4.2 Aproksimasi dengan *Gradient Approach* pada Perhitungan Harga *Life Settlement*

Untuk menghitung TFN dengan *gradient approach* yang dinotasikan sebagai  $\tilde{P}LS_x^G$  akan digunakan persamaan (2.28), (2.29), dan (2.30). Aproksimasi  $\tilde{P}LS_x^G = (PLS_x^G, I_{PLS_x^G}, r_{PLS_x^G})$  dengan metode ini mempertahankan nilai intinya, dan didapatkan persamaan berikut :

$$\begin{aligned} PLS_x^G &= C \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i)^{-t} \sum_{k=0}^{t-1} Y_{x+k-1} (1 - \min\{1, \beta \cdot q_{x+k-1}\}) \cdot \min\{1, \beta \cdot q_{x+t-1}\} \\ &\quad - P \sum_{t=1}^{\omega-x} (1+i)^{-t} \sum_{k=0}^{t-1} Y_{x+k-1} (1 - \min\{1, \beta \cdot q_{x+k-1}\}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Di sisi lain, untuk menghitung persebaran dari *fuzzy number* dengan *gradient approach*, sesuai dengan persamaan (2.29) dan (2.30), diperlukan turunan parsial dari harga *life settlement* terhadap tingkat bunga dan *mortality multiplier*. Mengingat fungsi harga *life settlement* pada persamaan (3.4) merupakan fungsi naik terhadap *mortality multiplier* dan merupakan fungsi turun terhadap tingkat bunga, formula dari persebaran *fuzzy number* harga *life settlement* dengan *gradient approach* adalah sebagai berikut :

$$I_{PLS_x^G} = \frac{\partial PLS_x}{\partial \beta} l_\beta - \frac{\partial PLS_x}{\partial i} r_i \quad (3.20)$$

$$r_{PLS_x^G} = \frac{\partial PLS_x}{\partial \beta} r_\beta - \frac{\partial PLS_x}{\partial i} l_i \quad (3.21)$$

Meskipun formula tersebut sudah sederhana, turunan-turunan tersebut mungkin sulit untuk dihitung secara praktis. Maka dari itu, akan diperkenalkan konsep yang lebih familiar untuk digunakan, yaitu durasi. Durasi adalah sebuah konsep yang secara umum digunakan oleh para praktisi untuk mengukur sensitivitas dari aset dan hutang terhadap tingkat bunga. Pengukuran ini juga dipergunakan untuk perhitungan harga polis asuransi jiwa (Li, 1994). Selain itu, juga terdapat pengukuran yang serupa dengan durasi tingkat bunga untuk mengukur sensitivitas terhadap *longevity risk*, yakni berhubungan dengan *mortality multiplier*  $\beta$ .

Akan didefinisikan durasi Macaulay tingkat bunga dari  $PLS_x$  terhadap fluktuasi tingkat bunga,  $D(PLS_x)$ , dengan cara yang mirip dengan durasi pada suatu aset hutang (Bierwag dan Kaufman, 1985), yaitu

$$D(PLS_x) = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot CF_t \cdot (1+i)^{-t}}{PV \text{ Cashflow}} = \frac{\sum_{t=1}^{\omega-x} C \cdot t \cdot (1+i)^{-t} {}_{t-1|}q_x^* - \sum_{t=1}^{\omega-x} P \cdot t \cdot (1+i)^{-t} {}_tP_x^*}{PLS_x} \quad (3.22)$$

(Chatta dan Alhabshi, 2018)

Perhatikan bahwa turunan parsial dari harga *life settlement* terhadap tingkat bunga memiliki bentuk berikut :

$$\frac{\partial PLS_x}{\partial i} = \sum_{t=1}^{\omega-x} C \cdot (-t) \cdot (1+i)^{-t-1} {}_{t-1|}q_x^* - \sum_{t=1}^{\omega-x} P \cdot (-t) \cdot (1+i)^{-t-1} {}_tP_x^* \quad (3.23)$$

Apabila persamaan (3.23) dikalikan  $-(1+i)$  pada kedua sisi, maka akan menghasilkan formula yang serupa dengan pembilang pada (3.22), sehingga persamaan (3.22) dapat ditulis kembali menjadi :

$$D(PLS_x) = \frac{\frac{\partial PLS_x}{\partial i} \cdot -(1+i)}{PLS_x} = \frac{\frac{\partial PLS_x}{\partial i}}{1+i} = \frac{-D(PLS_x) \cdot PLS_x}{1+i} \quad (3.24)$$

Untuk turunan parsial terhadap *mortality multiplier*, didefinisikan durasi *mortality multiplier* dari harga *life settlement* sebagai  $DM(PLS_x)$  (De Andrés-Sánchez, 2021), yaitu

$$DM(PLS_x) = \frac{\frac{\partial PLS_x}{\partial \beta}}{PLS_x} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial PLS_x}{\partial \beta} = DM(PLS_x) \cdot PLS_x \tag{3.26}$$

Perhatikan bahwa pada perhitungan  $PLS_x$ , variabel  $\beta$  hanya terdapat pada  ${}_{t-1}q_x^*$  dan  ${}_t p_x^*$ . Maka dari itu, akan dirumuskan terlebih dahulu turunan dari  ${}_{t-1}q_x^*$  dan  ${}_t p_x^*$  terhadap  $\beta$ .

Pertama, akan dirumuskan turunan dari  ${}_t p_x^*$  terhadap  $\beta$ ,  $\frac{\partial {}_t p_x^*}{\partial \beta}$ , yang akan dinotasikan sebagai  ${}_t p_x^{* \prime}$ , yaitu,

$$\begin{aligned} {}_t p_x^{* \prime} &= \frac{\partial \sum_{k=0}^{Q_{t-1}} (1 - q_{x+k}^*)}{\partial \beta} \\ &= \frac{\partial \sum_{k=0}^{Q_{t-1}} (1 - \beta \cdot q_{x+k})}{\partial \beta} \\ &= - \sum_{k=0}^{Q_{t-1}} q_{x+k} (1 - \beta \cdot q_{x+k}) \\ &= - \sum_{k=0}^{Q_{t-1}} q_{x+k} p_{x+k}^* \\ &= - \sum_{k=0}^{Q_{t-1}} q_{x+k} \frac{{}_t p_x^*}{p_{x+k}^*} \\ &= - {}_t p_x^* \sum_{k=0}^{Q_{t-1}} \frac{q_{x+k}}{p_{x+k}^*} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Untuk merumuskan turunan dari  ${}_{t-1}q_x^*$  terhadap  $\beta$ ,  $\frac{\partial {}_{t-1}q_x^*}{\partial \beta}$ , yang akan dinotasikan sebagai  ${}_{t-1}q_x^{* \prime}$ , berdasarkan persamaan (3.3) dan (3.27), maka turunannya menjadi,

$$\begin{aligned} {}_{t-1}q_x^{* \prime} &= q_{x+t-1}^* \cdot p_{x+t-1}^* - q_{x+t-1}^* \cdot {}_{t-1}p_x^* \sum_{k=0}^{Q_{t-2}} \frac{q_{x+k}}{p_{x+k}^*} \\ &= \frac{q_{x+t-1}^*}{\beta} \cdot {}_{t-1}p_x^* - q_{x+t-1}^* \cdot {}_{t-1}p_x^* \sum_{k=0}^{Q_{t-2}} \frac{q_{x+k}}{p_{x+k}^*} \\ &= q_{x+t-1}^* \cdot p_{x+t-1}^* \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{{}_{t-2}q_{x+k}}{p_{x+k}^*} \\ &= q_{x+t-1}^* \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{{}_{t-2}q_{x+k}}{p_{x+k}^*} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Maka dari itu, berdasarkan persamaan (3.25) dan (3.4), dapat dirumuskan durasi *mor-*

tality multiplier dari harga *life settlement* menjadi,

$$DM(PLS_x) = \frac{\sum_{t=1}^{\omega-x} C \cdot (1+i)^{-t} q_x^* - \sum_{t=1}^{\omega-x} P \cdot (1+i)^{-t} p_x^*}{\sum_{t=1}^{\omega-x} C \cdot (1+i)^{-t} q_x^* - \sum_{t=1}^{\omega-x} P \cdot (1+i)^{-t} p_x^*} \quad (3.29)$$

Dengan demikian, dengan menggunakan persamaan (2.29), (2.30), (3.23), dan (3.26), maka persamaan (3.20) dan (3.21) dapat diuraikan untuk mendapat nilai persebaran dari *triangular fuzzy number* dengan metode *gradient approach*, yaitu

$$\begin{aligned} I_{PLS_x^G} &= \frac{\partial PLS_x}{\partial \beta} l_\beta - \frac{\partial PLS_x}{\partial i} r_i \\ &= DM(PLS_x) l_\beta + \frac{1}{1+i} D(PLS_x) r_i \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} r_{PLS_x^G} &= \frac{\partial PLS_x}{\partial \beta} r_\beta - \frac{\partial PLS_x}{\partial i} l_i \\ &= DM(PLS_x) r_\beta + \frac{1}{1+i} D(PLS_x) l_i \end{aligned} \quad (3.31)$$

Serupa dengan aproksimasi dengan *secant approach*, aproksimasi dengan *gradient approach* ini juga menghasilkan harga *life settlement* yang sudah berupa TFN,  $\tilde{P}LS_x^G = (PLS_x^G, I_{PLS_x^G}, r_{PLS_x^G})$ , dengan fungsi keanggotaan dan  $\alpha$ -cut serupa dengan persamaan (2.1) dan (2.2) yaitu :

$$\mu_{\tilde{P}LS_x^G}(x) = \begin{cases} \frac{x - PLS_x^G + I_{PLS_x^G}}{I_{PLS_x^G}}, & PLS_x^G - I_{PLS_x^G} < x \leq PLS_x^G \\ \frac{PLS_x^G + r_{PLS_x^G} - x}{r_{PLS_x^G}}, & PLS_x^G < x \leq PLS_x^G + r_{PLS_x^G} \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} (PLS_x^G)_\alpha &= \left[ \underline{PLS_x^G}(\alpha), \overline{PLS_x^G}(\alpha) \right] \\ &= [PLS_x^G - I_{PLS_x^G}(1 - \alpha), PLS_x^G + r_{PLS_x^G}(1 - \alpha)] \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.4.3 Aproksimasi dengan *Expected Interval Approach* pada Perhitungan Harga *Life Settlement*

Pada kasus ini,  $\tilde{P}LS_x^{EI} = (PLS_x^{EI}, I_{PLS_x^{EI}}, r_{PLS_x^{EI}})$  merupakan aproksimasi *triangular fuzzy number* dari  $\tilde{P}LS_x$  dengan *expected interval approach* yang merupakan aproksimasi

$\tilde{P}L S_x$  yang mempertahankan ekspektasi intervalnya. Untuk memperoleh aproksimasi harga *life settlement* dengan metode ini, akan diterapkan persamaan-persamaan (2.43)-(2.52). Berikut persamaan-persamaan dari inti dan deviasi harga *life settlement* dengan *expected interval approach* :

$$\text{Jika } \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha + 2 \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha \leq 3 \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha + 3 \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha \leq \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha + 2 \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha, \text{ maka :}$$

$$PLS_x^{EI} = 3 \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha - \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha + 3 \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha - \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha \quad (3.34)$$

$$I_{PLSEI_x} = -4 \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha + 6 \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha + 6 \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha \quad (3.35)$$

$$r_{PLSEI_x} = 2 \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha + 4 \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha - 6 \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha - 6 \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha \quad (3.36)$$

Jika

$$2 \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha + \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha > 3 \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \alpha PLS_x(\alpha) d\alpha, \quad ,$$

atau  $I_{PLSEI_x} < 0$ , maka akan ditentukan nilai  $I_{PLSEI_x} = 0$  agar memenuhi batasan di persamaan (2.35), dan persamaan lainnya menjadi :

$$PLS_x^{EI} = \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha \quad (3.37)$$

$$I_{PLSEI_x} = 0 \quad (3.38)$$

$$r_{PLSEI_x} = 2 \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 PLS_x(\alpha) d\alpha \quad (3.39)$$

dan terakhir, jika,

$$3 \cdot \int_0^1 \underline{PLS}_x(\alpha) d\alpha + \int_0^1 \overline{PLS}_x(\alpha) d\alpha > \int_0^1 \underline{PLS}_x(\alpha) d\alpha + 2 \int_0^1 \overline{PLS}_x(\alpha) d\alpha,$$

atau  $r_{PLSEI_x} < 0$ , maka akan ditentukan nilai  $r_{PLSEI_x} = 0$  agar memenuhi batasan di persamaan (2.35), dan persamaan lainnya menjadi :

$$PLS_x^{EI} = \int_0^1 \overline{PLS}_x(\alpha) d\alpha \quad (3.40)$$

$$I_{PLSEI_x} = 2 \int_0^1 \overline{PLS}_x(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^1 \underline{PLS}_x(\alpha) d\alpha \quad (3.41)$$

$$r_{PLSEI_x} = 0 \quad (3.42)$$

Untuk menghitung persamaan-persamaan (3.34)-(3.42), akan digunakan kaidah Simpson dari Bab 2.6. Seperti yang digunakan telah digunakan Kaufmann (Kaufmann (1986) dan Rivas Jiménezz dan Rivas (1998),  $PLS_x$  akan dievaluasi pada sebelas tingkat keanggotaan, yaitu  $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1, \Delta\alpha = 0.1$ . Kemudian, untuk mengevaluasi kaidah Simpson, dengan menggunakan persamaan (2.68), didapatkan :

$$\int_0^1 \underline{PLS}_x(\alpha) d\alpha \approx \frac{1}{30} \underline{PLS}_x(0) + 2 \sum_{j=1}^4 \underline{PLS}_x \frac{2j}{10} + \sum_{j=1}^4 \underline{PLS}_x \frac{2j-1}{10} + \underline{PLS}_x(1) \quad (3.43)$$

$$\int_0^1 \overline{PLS}_x(\alpha) d\alpha \approx \frac{1}{30} \overline{PLS}_x(0) + 2 \sum_{j=1}^4 \overline{PLS}_x \frac{2j}{10} + \sum_{j=1}^5 \overline{PLS}_x \frac{2j-1}{10} + \overline{PLS}_x(1) \quad (3.44)$$

$$\int_0^1 \alpha \cdot \underline{PLS}_x(\alpha) d\alpha \approx \frac{1}{30} \sum_{j=1}^4 \frac{2j}{10} \cdot \underline{PLS}_x \frac{2j}{10} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^5 \frac{2j-1}{10} \underline{PLS}_x \frac{2j-1}{10} + \underline{PLS}_x(1) \quad \# \quad (3.45)$$

$$\int_0^1 \overline{PLS}_x(\alpha) d\alpha \approx \frac{1}{30} \sum_{j=1}^4 \frac{2j}{10} \cdot \overline{PLS}_x \frac{2j}{10} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^5 \frac{2j-1}{10} \overline{PLS}_x \frac{2j-1}{10} + \overline{PLS}_x(1) \quad \# \quad (3.46)$$

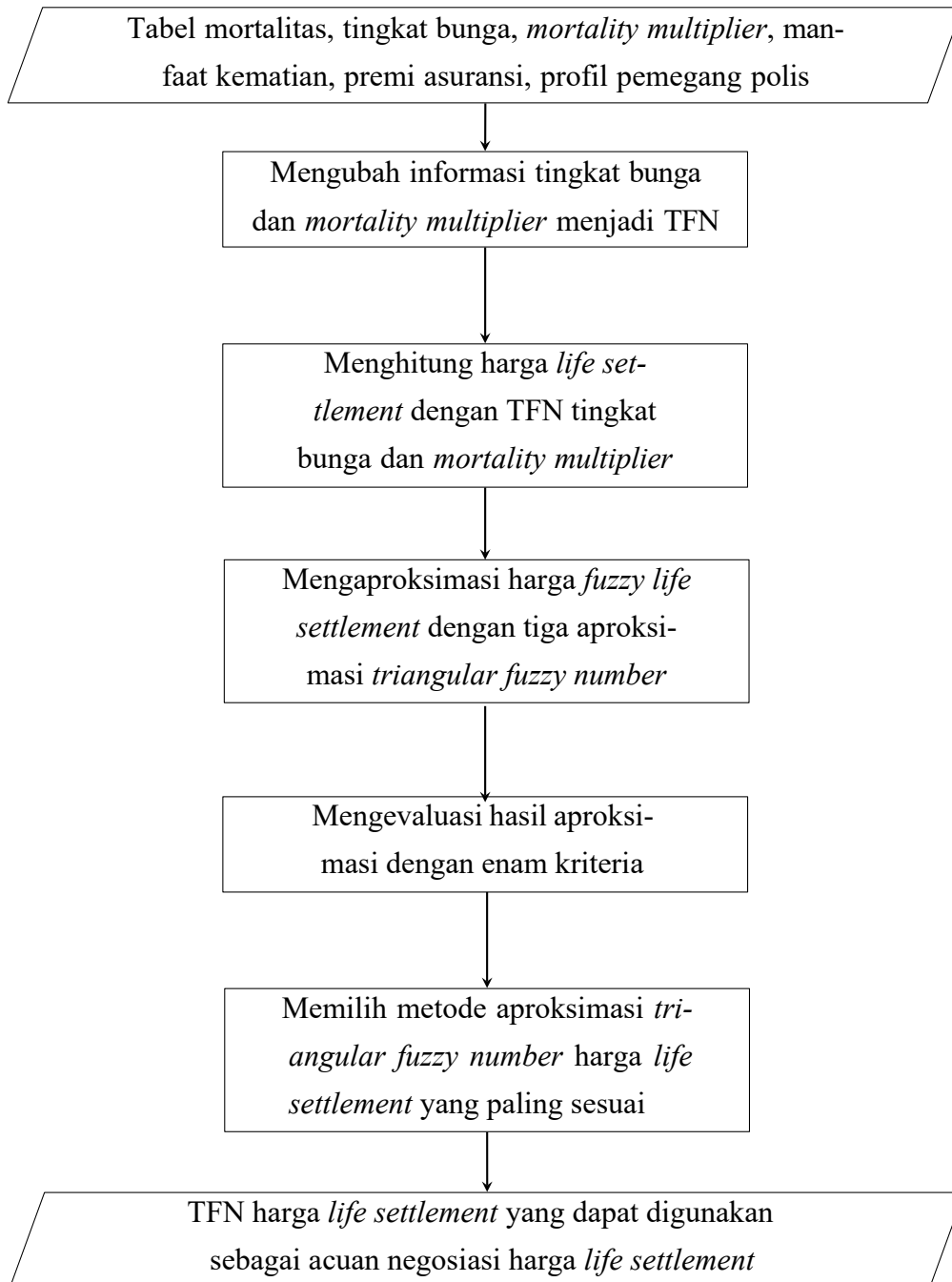
Aproksimasi dengan *expected interval approach* ini juga menghasilkan harga *life settlement* yang sudah berupa TFN,  $\tilde{PLS}_x^{EI} = (PLS_x^{EI}, l_{PLSEI}, r_{PLSEI})$ , dengan fungsi keanggotaan dan  $\alpha$ -cut serupa dengan persamaan (2.1) dan (2.2) yaitu :

$$\mu_{\tilde{PLS}_x^{EI}}(x) = \begin{cases} \frac{x - PLS_x^{EI} + l_{PLSEI}}{l_{PLSEI} - PLS_x^{EI}}, & PLS_x^{EI} - l_{PLSEI} < x \leq PLS_x^{EI} \\ \frac{PLS_x^{EI} - x}{PLS_x^{EI} - PLS_x^{EI} + r_{PLSEI}}, & PLS_x^{EI} < x \leq PLS_x^{EI} + r_{PLSEI} \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} (PLS_x^{EI})_\alpha &= \left[ \underline{PLS}_x^{EI}(\alpha), \overline{PLS}_x^{EI}(\alpha) \right] \\ &= [PLS_x^{EI} - l_{PLSEI}(1 - \alpha), PLS_x^{EI} + r_{PLSEI}(1 - \alpha)] \end{aligned} \quad (3.48)$$

**BAB 4**  
**ANALISIS PERHITUNGAN HARGA *LIFE SETTLEMENT* DENGAN**  
**APROKSIMASI *TRIANGULAR FUZZY NUMBER***

Pada bab ini, akan disimulasikan dan dianalisis perhitungan harga *life settlement* dengan metode *fuzzy* berdasarkan *flowchart* di bawah berikut.



## 4.1 Deskripsi Data

Pada penelitian ini, untuk *input* data yang akan digunakan adalah sebagai berikut :

### 1. Tabel mortalitas

Akan digunakan data tabel mortalitas Indonesia tahun 2023 dari situs [PAI \(2024\)](#). Tabel mortalitas tersebut menggunakan peserta Sistem Jaminan Kesehatan Nasional (JKN) di Indonesia sebagai sampelnya.

### 2. Tingkat bunga

Pada perhitungan harga *life settlement*, terdapat dua tingkat bunga yaitu tingkat bunga awal yang digunakan saat menghitung premi asuransi serta tingkat bunga yang kemudian akan digunakan untuk menghitung harga *life settlement*. Tingkat bunga BI-*rate* per tanggal 20 November 2024 sebesar 6% ([Indonesia, 2024](#)) akan diasumsikan sebagai tingkat bunga awal yang digunakan perusahaan asuransi untuk menerbitkan polis asuransi. Sedangkan tingkat bunga yang digunakan investor untuk menghitung harga *life settlement* diasumsikan terdapat 5 informasi tingkat bunga yang berbeda-beda yang dianggap masing-masing sudah memperhitungkan risiko dari *life settlement*, yaitu 10%; 12%; 15%; 17%; 21%. Diasumsikan nilai-nilai tingkat bunga yang digunakan lebih besar dari BI-*rate* karena investor akan membutuhkan imbal balik yang besar atas risiko-risiko yang terdapat dalam transaksi *life settlement*. Nilai-nilai tingkat bunga yang diasumsikan cukup berdekatan satu sama lain karena meskipun terdapat subjektivitas dalam menentukan nilai-nilai tersebut, pada praktiknya penilaian terhadap hal yang sama oleh dua orang yang berbeda tidak akan berbeda terlalu drastis.

### 3. *Mortality multiplier*

Pada simulasi perhitungan harga *life settlement* ini, akan diasumsikan terdapat 5 informasi *mortality multiplier* berbeda dari *medical underwriter* yang berbeda-beda yaitu 2,3; 2,7; 3,2; 3,8; 5. Diasumsikan nilai-nilai *mortality multiplier* bernilai lebih dari 1 karena seringkali pemegang polis yang ingin menjual polisnya memiliki kondisi kesehatan yang lebih buruk daripada populasi yang memiliki karakteristik yang sama. Nilai-nilai *mortality multiplier* yang diasumsikan juga cukup berdekatan satu sama lain dengan alasan yang sama dengan asumsi tingkat bunga yang digunakan untuk menghitung harga *life settlement*.

### 4. Manfaat kematian

Untuk simulasi perhitungan harga *life settlement* ini, diasumsikan pemegang po-

lis membeli polis asuransi yang membayar manfaat kematian sebesar 1000 satuan uang.

#### 5. Profil pemegang polis

Untuk simulasi ini, diasumsikan pemegang polis membeli polis pada usia 35 tahun dan ingin menjual polisnya ke investor pada usia 65 tahun.

#### 6. Premi asuransi

Pada skripsi ini, premi asuransi akan dihitung berdasarkan asumsi-asumsi pada simulasi ini menggunakan prinsip ekuivalensi. Pada praktiknya, dalam menghitung harga *life settlement*, premi sudah diketahui dan langsung dapat digunakan untuk menghitung harga *life settlement*. Berdasarkan prinsip ekuivalensi pada persamaan (2.61), maka dapat dihitung besar premi dari polis asuransi tersebut yaitu dengan persamaan berikut,

$$\sum_{t=1}^{111-35} 1000 \cdot (1,06)^{-t} {}_{t-1}q_{35} = \sum_{t=0}^{111-35} P_{35+t} \cdot (1,06)^{-t} {}_t p_{35} \quad (4.1)$$

Tabel mortalitas yang digunakan memiliki batas usia maksimum 111 tahun serta informasi  ${}_{t-1}q_{35}$  dan  ${}_t p_{35}$  dapat diperoleh dari tabel tersebut, sehingga didapatkan besar premi sebesar 8,361 satuan uang.

## 4.2 Konstruksi *Triangular Fuzzy Number* untuk Menghitung Harga *Life Settlement*

Untuk memperhitungkan ketidakpastian dari informasi *mortality multiplier* dan tingkat bunga yang akan digunakan untuk menghitung harga *life settlement*, maka informasi tersebut yang telah diasumsikan pada subbab 4.1 akan diubah menjadi *triangular fuzzy number* menggunakan langkah-langkah yang telah dijelaskan pada subbab 2.3.

### 4.2.1 Konstruksi *Triangular Fuzzy Number Mortality Multiplier*

Berdasarkan asumsi *mortality multiplier* pada subbab 4.1 yakni 2,3; 2,7; 3,2; 3,8; 5, maka informasi tersebut akan diubah kedalam TFN untuk *mortality multiplier*,  $\tilde{\theta} = (\theta, l_{\theta}, r_{\theta})$ . Pertama, informasi-informasi tersebut akan dimasukkan ke dalam sebuah himpunan  $A = \{2,3; 2,7; 3,2; 3,8; 5\}$ . Selanjutnya, dapat dibentuk matriks jarak untuk *mor-*

*mortality multiplier*,  $\mathbf{D}$ , berdasarkan persamaan (2.8), yaitu  $d_{ij} = |a_i - a_j|$ , sebagai berikut,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,4 & 0,9 & 1,5 & 2,7 \\ 0,4 & 0,0 & 0,5 & 1,1 & 2,3 \\ 0,9 & 0,5 & 0,0 & 0,6 & 1,8 \\ 1,5 & 1,1 & 0,6 & 0,0 & 1,2 \\ 2,7 & 2,3 & 1,8 & 1,2 & 0,0 \end{bmatrix}$$

Maka rata-rata jarak untuk masing-masing entri himpunan berdasarkan persamaan (2.9),  $\bar{d}_i = \frac{\sum_{j=1}^n d_{ij}}{n-1}$ , secara berurutan adalah,

$$\bar{d}_1 = 1,375 \quad \bar{d}_2 = 1,075 \quad \bar{d}_3 = 0,95 \quad \bar{d}_4 = 1,1 \quad \bar{d}_5 = 2$$

Selanjutnya, dapat dibentuk matriks rasio kepentingan untuk *mortality multiplier*,  $\mathbf{P}$ , berdasarkan persamaan (2.11), yaitu  $p_{ij} = \frac{d_{ij}}{\bar{d}_i}$ , sebagai berikut,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,782 & 0,691 & 0,800 & 1,455 \\ 1,279 & 1,000 & 0,884 & 1,023 & 1,860 \\ 1,447 & 1,132 & 1,000 & 1,158 & 2,105 \\ 1,250 & 0,977 & 0,864 & 1,000 & 1,818 \\ 0,688 & 0,538 & 0,475 & 0,550 & 1,000 \end{bmatrix}$$

Maka, bobot atau tingkat kepentingan dari masing-masing entri himpunan *mortality multiplier*,  $w$ , berdasarkan persamaan (2.12),  $w_i = \frac{\sum_{j=1}^n 1/p_{ji}}{\sum_{j=1}^n 1/p_{ji}}$ , secara berurutan adalah,

$$w_1 = 0,177 \quad w_2 = 0,226 \quad w_3 = 0,256 \quad w_4 = 0,221 \quad w_5 = 0,121$$

Maka, dapat dihitung inti dari pusat TFN  $\beta^*$ , berdasarkan persamaan (2.13),  $\beta = \sum_{i=1}^n w_i a_i$ , adalah  $\beta = 3,279$

Berikutnya untuk menghitung deviasi kiri dan kanan dari TFN untuk *mortality multiplier*, yang dinotasikan sebagai  $l_\beta$  dan  $r_\beta$  secara berurutan, akan dihitung terlebih dahulu rata-rata berbobot dari entri-entri himpunan yang lebih besar dan entri-entri himpunan yang lebih kecil dari  $\beta$ , berdasarkan persamaan (2.20) dan (2.21) secara berurutan yaitu

$$a^r = \frac{\sum_{i=1, a_i > \beta} w_i a_i}{\sum_{i=1, a_i > \beta} w_i} \quad \text{dan} \quad a^l = \frac{\sum_{i=1, a_i < \beta} w_i a_i}{\sum_{i=1, a_i < \beta} w_i}, \quad \text{diperoleh } a^r = 4,226 \quad \text{dan} \quad a^l = 2,787 \quad \text{sehingga}$$

didapat rasio deviasi kiri dan kanannya, berdasarkan persamaan (2.22),  $\eta^* = \frac{\beta - a^l}{a^r - \beta}$ , yaitu  $\eta^* = 0,520$ . Untuk rata-rata deviasi, dapat digunakan persamaan (2.19),  $\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i |a_i - \beta|}$ ,

untuk mendapatkan  $\hat{\sigma} = 0,648$ . Maka berdasarkan persamaan (2.17) dan (2.18),  $l_{\beta} = \frac{3(1+n)\eta\sigma}{1+\eta^2}$  dan  $r_{\beta} = \frac{3(1+n)\sigma}{1+\eta^2}$ , deviasi kiri dan kanan dari TFN untuk *mortality multiplier* secara berurutan adalah  $l_{\beta} = 1,209$  dan  $r_{\beta} = 2,325$  sehingga terbentuk TFN  $\tilde{\beta} = (3,279; 1,209; 2,325)$ .

#### 4.2.2 Konstruksi *Triangular Fuzzy Number* Tingkat Bunga

Konstruksi TFN untuk tingkat bunga akan mengikuti langkah-langkah yang sama dengan konstruksi TFN untuk *mortality multiplier* pada subbab 4.2.1. Berdasarkan asumsi tingkat bunga pada subbab 4.1 yakni 10%; 12%; 15%; 17%; 21%, maka informasi tersebut akan diubah kedalam TFN untuk tingkat bunga,  $\tilde{i} = (i, l_i, r_i)$ . Pertama, informasi-informasi tersebut akan dimasukkan ke dalam sebuah himpunan  $A = \{0,10; 0,12; 0,15; 0,17; 0,21\}$ . Selanjutnya, dapat dibentuk matriks jarak untuk tingkat bunga,  $\mathbf{D}$ , berdasarkan persamaan (2.8), sebagai berikut,

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \cdot & 0\% & 2\% & 5\% & 7\% & 11\% & \cdot \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cdot & 2\% & 0\% & 3\% & 5\% & 9\% \\ \cdot & 5\% & 3\% & 0\% & 2\% & 6\% \\ \cdot & 7\% & 5\% & 2\% & 0\% & 4\% \\ \cdot & 11\% & 9\% & 6\% & 4\% & 0\% \end{matrix} & \end{matrix}$$

Maka, rata-rata jarak untuk masing-masing entri himpunan berdasarkan persamaan (2.9),  $\bar{d}$ , secara berurutan adalah,

$$\bar{d}_1 = 6,25\% \quad \bar{d}_2 = 4,75\% \quad \bar{d}_3 = 4\% \quad \bar{d}_4 = 4,5\% \quad \bar{d}_5 = 7,5\%$$

Selanjutnya, dapat dibentuk matriks rasio kepentingan untuk tingkat bunga,  $\mathbf{P}$ , berdasarkan persamaan (2.11), sebagai berikut,

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \cdot & 1,000 & 0,760 & 0,640 & 0,720 & 1,200 \\ & 1,316 & 1,000 & 0,842 & 0,947 & 1,579 \\ \cdot & 1,563 & 1,188 & 1,000 & 1,125 & 1,875 \\ \cdot & 1,389 & 1,056 & 0,889 & 1,000 & 1,667 \\ \cdot & 0,833 & 0,633 & 0,533 & 0,600 & 1,000 \end{matrix} & \end{matrix}$$

Maka, bobot atau tingkat kepentingan dari masing-masing entri himpunan tingkat bunga,

$w$ , berdasarkan persamaan (2.12), secara berurutan adalah,

$$w_1 = 0,164 \quad w_2 = 0,216 \quad w_3 = 0,256 \quad w_4 = 0,228 \quad w_5 = 0,137$$

Maka, dapat dihitung inti dari pusat TFN  $\tilde{i}$ , berdasarkan persamaan (2.13), adalah  $i = 14,808\%$ . Berikutnya untuk menghitung deviasi kiri dan kanan dari TFN untuk tingkat bunga, yang dinotasikan sebagai  $l_i$  dan  $r_i$  secara berurutan, akan dihitung terlebih dahulu rata-rata berbobot dari entri-entri himpunan yang lebih besar dan entri-entri himpunan yang lebih kecil dari  $i$ , berdasarkan persamaan (2.20) dan (2.21) secara berurutan, yaitu  $\alpha^r = 17,055\%$  dan  $\alpha^l = 11,136\%$  sehingga didapat rasio deviasi kiri dan kanannya, berdasarkan persamaan (2.22) yaitu  $\eta^{\hat{}} = 1,634$ . Untuk rata-rata deviasi, dapat digunakan persamaan (2.19), untuk mendapatkan  $\hat{\sigma} = 2,788\%$ . Maka berdasarkan persamaan (2.17) dan (2.18), deviasi kiri dan kanan dari TFN untuk tingkat bunga secara berurutan adalah  $l_i = 9,808\%$  dan  $r_i = 6,002\%$  sehingga terbentuk TFN  $\tilde{i} = (14,808\%; 9,808\%; 6,002\%)$ .

### 4.3 Kalkulasi Harga *Life Settlement* dengan Metode *Fuzzy Number*

Setelah mendapatkan TFN untuk *mortality multiplier* dan tingkat bunga, kini dapat dihitung harga *life settlement* dengan metode *fuzzy*. Berdasarkan asumsi-asumsi yang dibuat pada subbab 4.1, maka batas atas dan batas bawah interval *fuzzy number* harga *life settlement* dapat dihitung dengan persamaan (3.12) dan (3.13) yaitu,

$$\begin{aligned} \underline{PLS}_x(\alpha) = & 1000 \sum_{t=1}^{114-65} \frac{1}{1 + \bar{i}(\alpha)}^{-t} \prod_{k=0}^{t-2} \left( 1 - \underline{q}_{65+k-1}^*(\alpha) \right) \cdot \underline{q}_{65+k-1}^*(\alpha) - \\ & 8,361 \sum_{t=1}^{114-65} \frac{1}{1 + \bar{i}(\alpha)}^{-t} \prod_{k=0}^{t-1} \left( 1 - \underline{q}_{65+k-1}^*(\alpha) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{PLS}_x(\alpha) = & 1000 \sum_{t=1}^{114-65} \frac{1}{(1 + \hat{i}(\alpha))}^{-t} \prod_{k=0}^{t-2} \left( 1 - \overline{q}_{65+k-1}^*(\alpha) \right) \cdot \overline{q}_{65+k-1}^*(\alpha) - \\ & 8,361 \sum_{t=1}^{114-65} \frac{1}{(1 + \hat{i}(\alpha))}^{-t} \prod_{k=0}^{t-1} \left( 1 - \overline{q}_{65+k-1}^*(\alpha) \right) \end{aligned}$$

dengan TFN untuk tingkat bunga dapat dihitung dengan persamaan (3.10) yaitu  $\hat{i}(\alpha) = i - l_i(1 - \alpha)$ ;  $\bar{i}(\alpha) = i + r_i(1 - \alpha)$  dan TFN probabilitas mortalitas dapat dihitung dengan persamaan (3.11) yaitu  $\underline{q}_{65+k-1}^*(\alpha) = \min\{1, [\beta - l_\beta(1 - \alpha)] \cdot q_{65+k-1}\}$ ;  $\overline{q}_{65+k-1}^*(\alpha) = \min\{1, [\beta + r_\beta(1 - \alpha)] \cdot q_{65+k-1}\}$ . Berdasarkan deskripsi data pada subbab 4.1,

besar premi sebesar 8,361 satuan uang dan benefit sebesar 1000 satuan uang serta TFN *mortality multiplier*  $\tilde{\theta} = (3,279; 1,209; 2,325)$  dan TFN tingkat bunga  $\tilde{i} = (14,808\%; 9,808\%; 6,002\%)$ , maka dapat diperoleh harga *life settlement* pada beberapa tingkat keanggotaan sebagai berikut,

Tabel 4.1: Batas Interval Harga *Life Settlement* pada Berbagai Tingkat Keanggotaan

Tingkat Keanggotaan ( $\alpha$ )	$\underline{PLS}_x(\alpha)$	$\overline{PLS}_x(\alpha)$
1	354,711	354,711
0,9	336,645	387,421
0,8	318,962	421,033
0,7	301,651	455,583
0,6	284,700	491,112
0,5	268,100	527,661
0,4	251,841	565,273
0,3	235,912	603,995
0,2	220,306	643,875
0,1	205,013	684,963
0	190,023	727,315

Pada Tabel 4.1, diperoleh batas interval harga *life settlement* pada beberapa tingkat keanggotaan. Sebagai contoh, maka saat kita menggunakan tingkat bunga dan *mortality multiplier* yang memiliki tingkat keanggotaan di atas 0,9, maka akan didapatkan harga *life settlement* di antara 336,645 dan 387,421. Sebagai contoh lain, apabila kita sembarang menggunakan tingkat bunga dan *mortality multiplier* pada tingkat keanggotaan manapun, maka harga *life settlement* akan berada di antara 190,023 dan 727,315. Seperti yang telah dijelaskan pada subbab 2.1, tingkat keanggotaan merupakan indikasi seberapa sesuai angka tersebut menjadi harga *life settlement* dengan tingkat keanggotaan  $\alpha = 1$  merupakan nilai yang paling sesuai dan tingkat keanggotaan  $\alpha = 0$  berarti nilai tersebut sama sekali bukan harga *life settlement* yang sesuai.

Perhatikan bahwa hasil yang diperoleh pada Tabel 4.1 juga menampilkan harga *life settlement* yang dihitung menggunakan parameter pasti, yakni pada saat  $\alpha = 1$  yaitu sebesar 354,711. Harga tersebut dihitung menggunakan tingkat bunga dan *mortality multiplier* yang merupakan inti dari TFN masing-masing. Maka dari itu, menghitung harga *life settlement* dengan menggunakan metode *fuzzy* tidak hanya dapat memberikan hasil perhitungan dengan parameter pasti, namun juga dapat memberikan interval harga tergantung tingkat keanggotaan. Hasil ini akan sangat bermanfaat di pasar *life settlement* dimana informasi mengenai tingkat bunga dan *mortality multiplier* akan subjektif dan tidak menentu. Maka dari itu, saat terdapat ketidakpastian, perhitungan dengan *fuzzy number* akan memiliki keuntungan. *Fuzzy number* dapat menangkap ketidakpastian dan memberikan informasi mengenai interval harga yang mungkin pada masing-masing tingkat keanggotaan, sedangkan penggunaan parameter pasti hanya akan memberikan satu hasil. Namun, selanjutnya *fuzzy number* harga *life settlement* ini akan diaproksimasi menjadi TFN agar lebih mudah untuk diinterpretasikan dan diimplementasikan. Alih-alih menghitung semua harga *life settlement* yang mungkin pada setiap tingkat keanggotaan, dapat digunakan aproksimasi TFN agar lebih mudah.

#### 4.4 Aproksimasi *Triangular Fuzzy Number* dari Harga *Life Settlement*

Harga *life settlement* kini akan diaproksimasi dengan tiga pendekatan berbeda yang telah dijelaskan pada subbab 2.4. Pendekatan-pendekatan tersebut adalah pendekatan *secant*, *gradient*, dan *expected interval*, yang akan disingkat menjadi SA, GA, dan EIA secara berurutan. Formula-formula yang akan digunakan untuk menghitung harga *life settlement* dari masing-masing aproksimasi adalah formula-formula yang dijelaskan pada subbab 3.4. Pendekatan dengan SA menggunakan *1-cut* dan *0-cut* dari PLS, GA menggunakan ukuran durasi tingkat bunga dan *mortality multiplier* beserta deviasi dari tingkat

bunga dan *mortality multiplier*, sedangkan EIA meminimalisir jaraknya dengan PLS. Hasil perhitungan TFN harga *life settlement* dengan masing-masing pendekatan adalah sebagai berikut,

Tabel 4.2: Hasil Aproksimasi TFN Harga *Life Settlement*

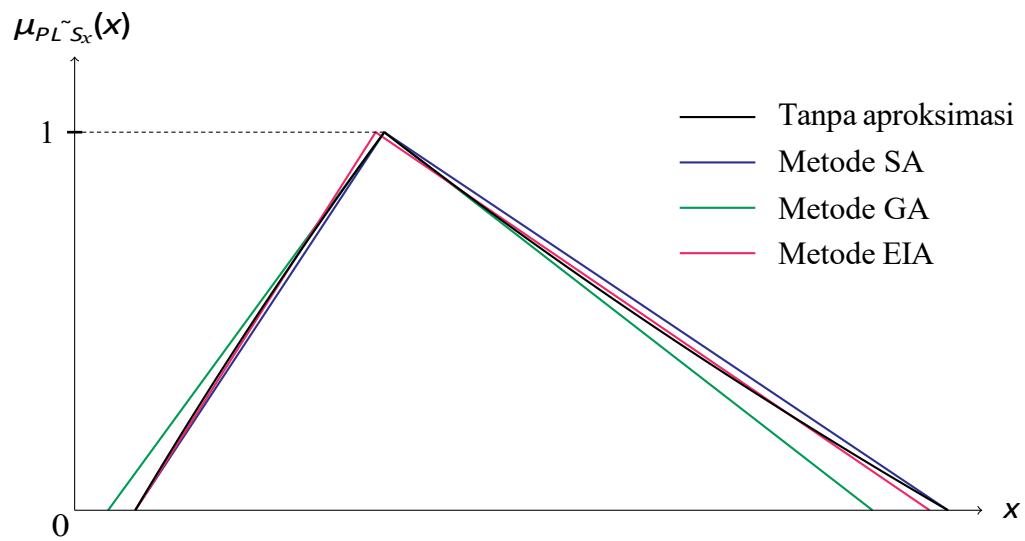
Pendekatan	Inti TFN	Deviasi Kiri	Deviasi Kanan
SA	$PLS_x^S = 354,711$	$l_{PLSS_x} = 164,687$	$r_{PLSS_x} = 372,604$
GA	$PLS_x^G = 354,711$	$l_{PLSG_x} = 182,602$	$r_{PLSG_x} = 322,726$
EIA	$PLS_x^{EI} = 348,980$	$l_{PLSEI_x} = 158,918$	$r_{PLSEI_x} = 366,247$

Setelah mendapatkan inti dan deviasi TFN harga *life settlement* dari masing-masing aproksimasi, dapat dihitung aproksimasi harga *life settlement* pada berbagai tingkat keanggotaan tertentu, yaitu

Tabel 4.3: Aproksimasi Harga *Life Settlement* dari Tiga Pendekatan pada Berbagai Tingkat Keanggotaan

$\alpha$	SA		GA		EIA	
	$PLS_x^S(\alpha)$	$PLS_x^S(\alpha)$	$PLS_x^G(\alpha)$	$PLS_x^G(\alpha)$	$PLS_x^{EI}(\alpha)$	$PLS_x^{EI}(\alpha)$
1	354,711	354,711	354,711	354,711	348,980	348,980
0,9	338,242	391,971	336,450	386,983	333,088	385,605
0,8	321,773	429,231	318,190	419,256	317,197	422,229
0,7	305,304	466,492	299,930	451,529	301,305	458,854
0,6	288,836	503,752	281,670	483,801	285,413	495,479
0,5	272,367	541,013	263,409	516,074	269,521	532,104
0,4	255,898	578,273	245,149	548,346	253,629	568,728
0,3	239,430	615,533	226,889	580,619	237,738	605,353
0,2	222,961	652,794	208,629	612,892	221,846	641,978
0,1	206,492	690,054	190,368	645,164	205,954	678,602
0	190,023	727,315	172,108	677,437	190,062	715,227

Berikut ilustrasi dari perbandingan bentuk *fuzzy number* harga *life settlement* tanpa aproksimasi dengan hasil aproksimasi tiga metode,



Gambar 4.1: Perbandingan hasil aproksimasi tiga pendekatan dengan harga *fuzzy life settlement* awal

Dari Tabel 4.3 di atas, harga-harga *life settlement* pada berbagai tingkat keanggotaan tersebut dapat dijadikan acuan saat menentukan harga *life settlement*. Masing-masing tingkat keanggotaan pada berbagai metode memiliki batas bawah dan batas atas interval. Umumnya tentu saja pemegang polis akan bernegosiasi dengan batas atas interval untuk memperoleh harga yang lebih tinggi sedangkan investor akan bernegosiasi dengan batas bawah interval untuk memperoleh harga yang lebih rendah. Tingkat keanggotaan yang digunakan akan bergantung pada risiko dan spekulasi dari masing-masing pihak mengenai tingkat bunga dan tingkat mortalitas tertanggung. Tingkat keanggotaan yang semakin dekat dengan 1 menandakan harga *life settlement* dihitung menggunakan asumsi-asumsi yang semakin percaya pada data-data yang diasumsikan sedangkan tingkat keanggotaan yang semakin dekat dengan 0 menandakan pandangan harga *life settlement* yang lebih konservatif atau hati-hati sehingga memperhitungkan kemungkinan-kemungkinan yang lebih ekstrem untuk mengurangi risiko kerugian. Masing-masing pihak dapat bernegosiasi untuk menentukan harga yang disepakati dengan berbagai cara seperti menghitung rata-rata dari negosiasi harga kedua pihak, atau berbagai cara lainnya hingga mendapatkan kesepakatan. Sebagai contoh, misalkan pemegang polis mengajukan harga batas atas interval pada tingkat keanggotaan 0,9 karena percaya pada data asumsi akan tetapi investor berargumen untuk menggunakan harga batas bawah interval pada tingkat keanggotaan 0,4 karena investor berspekulasi bahwa kondisi tingkat bunga akan memburuk pada beberapa tahun ke depan. Setelah bernegosiasi, kedua belah pihak dapat mencapai keputusan harga akhir seperti misalnya rata-rata dari dua harga yang diajukan.

Pada Gambar 4.1 di atas, dapat dilihat ilustrasi dari *fuzzy number* harga *life settlement* pada berbagai tingkat keanggotaan dengan tiga aproksimasi yang telah dilakukan. Semakin rendah tingkat keanggotaan, maka akan semakin lebar interval harga *life settlement* yang memungkinkan. Baik hasil aproksimasi maupun tanpa aproksimasi, *fuzzy number* harga *life settlement* dapat digunakan untuk menentukan harga transaksi *life settlement*. Aproksimasi dilakukan untuk mempermudah perhitungan pada berbagai tingkat keanggotaan. Dari tiga aproksimasi yang dilakukan, dapat dievaluasi kelebihan dan kekurangan dari masing-masing aproksimasi.

#### 4.5 Kriteria Evaluasi Aproksimasi *Triangular Fuzzy Number*

Menurut Grzegorzewski dan Mrówka (2005), ketika melakukan asesmen terhadap kualitas aproksimasi yang dilakukan pada sesuatu yang tidak pasti, perlu disadari bahwa wajar apabila terdapat sedikit penyimpangan/deviasi. Hal ini dikarenakan masalah-masalah yang berhubungan dengan ketidakpastian lebih bersifat kualitatif dan tidak

menomorsatukan presisi. Aproksimasi yang dilakukan terhadap *fuzzy number* harga *life settlement* harus mempertahankan beberapa parameter dari *fuzzy number* asalnya, mudah untuk diimplementasikan, mudah untuk dihitung, dan mudah diinterpretasikan. Maka dari itu, untuk mengevaluasi kualitas aproksimasi TFN yang digunakan, [De Andrés-Sánchez dan Puchades \(2023\)](#) mengusulkan enam kriteria yang tidak hanya fokus pada kemiripan dengan *fuzzy number* awal, namun juga fokus pada kegunaan dan kemudahan untuk digunakan bagi para praktisi dan analis yang belum memiliki pengetahuan mendalam terhadap konsep *fuzzy number*. Aspek tersebut merupakan aspek penting mengingat industri *life settlement* yang belum berkembang di Indonesia dan masih memerlukan pengembangan-pengembangan baru. Berikut kriteria-kriteria yang dievaluasi :

### 1) Kriteria 1 : Akurasi aproksimasi

Kriteria ini umum digunakan untuk menilai akurasi hasil aproksimasi agar jarak hasil aproksimasi TFN dengan *fuzzy number* yang diaproksimasi sekecil mungkin. Untuk menentukan akurasi dari masing-masing aproksimasi, akan dilihat galat dari aproksimasi dengan *fuzzy number* asalnya. Sebagai contoh, formula untuk galat dari pendekatan SA adalah sebagai berikut,

$$e^S(\alpha) = \frac{\overline{PLS}_x(\alpha) - \overline{PLS}_x^S(\alpha)}{\overline{PLS}_x(\alpha)} \quad (4.2)$$

$$\bar{e}^S(\alpha) = \frac{\overline{PLS}_x(\alpha) - \overline{PLS}_x^S(\alpha)}{\overline{PLS}_x(\alpha)} \quad (4.3)$$

Formula galat dari pendekatan lainnya serupa dan hanya perlu mengganti indikator *S* pada formula dengan *G* untuk GA dan *EI* untuk EIA. Galat dari masing-masing aproksimasi pada berbagai tingkat keanggotaan pada interval 0 sampai 1 dapat dilihat pada Tabel [4.4](#) berikut,

Tabel 4.4: Galat hasil aproksimasi TFN pada berbagai tingkat keanggotaan pada interval 0 hingga 1

$\alpha$	SA		GA		EIA	
	$\underline{e^S}(\alpha)$	$\overline{e^S}(\alpha)$	$\underline{e^G}(\alpha)$	$\overline{e^G}(\alpha)$	$\underline{e^{EI}}(\alpha)$	$\overline{e^{EI}}(\alpha)$
1	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	1,616%	1,616%
0,9	0,474%	1,174%	0,058%	0,113%	1,057%	0,469%
0,8	0,881%	1,947%	0,242%	0,422%	0,554%	0,284%
0,7	1,211%	2,394%	0,571%	0,890%	0,115%	0,718%
0,6	1,453%	2,574%	1,064%	1,489%	0,250%	0,889%
0,5	1,592%	2,530%	1,750%	2,196%	0,530%	0,842%
0,4	1,611%	2,300%	2,657%	2,994%	0,710%	0,611%
0,3	1,491%	1,910%	3,825%	3,870%	0,774%	0,225%
0,2	1,205%	1,385%	5,301%	4,812%	0,699%	0,295%
0,1	0,722%	0,743%	7,143%	5,810%	0,459%	0,929%
0	0,000%	0,000%	9,428%	6,858%	0,021%	1,662%

Galat dari masing-masing aproksimasi pada berbagai tingkat keanggotaan pada interval 0,9 sampai 1 dapat dilihat pada Tabel 4.5 berikut,

Tabel 4.5: Galat hasil aproksimasi TFN pada berbagai tingkat keanggotaan pada interval 0,9 hingga 1

$\alpha$	SA		GA		EIA	
	$\underline{e^S}(\alpha)$	$\overline{e^S}(\alpha)$	$\underline{e^G}(\alpha)$	$\overline{e^G}(\alpha)$	$\underline{e^{EI}}(\alpha)$	$\overline{e^{EI}}(\alpha)$
1	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	1,616%	1,616%
0,99	0,050%	0,138%	0,001%	0,001%	1,557%	1,481%
0,98	0,100%	0,271%	0,002%	0,005%	1,500%	1,350%
0,97	0,149%	0,400%	0,005%	0,011%	1,442%	1,225%
0,96	0,197%	0,524%	0,009%	0,019%	1,386%	1,104%
0,95	0,245%	0,643%	0,014%	0,029%	1,330%	0,988%
0,94	0,292%	0,758%	0,020%	0,042%	1,274%	0,875%
0,93	0,339%	0,868%	0,028%	0,057%	1,219%	0,768%
0,92	0,385%	0,974%	0,037%	0,073%	1,164%	0,664%
0,91	0,430%	1,076%	0,047%	0,092%	1,110%	0,564%
0,9	0,474%	1,174%	0,058%	0,113%	1,057%	0,469%

Selanjutnya, akan dihitung rata-rata berbobot dari galat tersebut pada interval tingkat keanggotaan  $\alpha \in [\alpha^*, 1]$  untuk  $\alpha^* = 0$  dan  $\alpha^* = 0,9$ . Penggunaan tingkat keanggotaan sebagai bobot untuk menghitung rata-rata berbobot dari galat bertujuan untuk memberikan prioritas lebih untuk galat nilai-nilai yang lebih dipercaya ( $\alpha$  semakin mendekati 1). Saat rata-rata berbobot dievaluasi di  $\alpha^* = 0$ , dapat dilihat akurasi TFN dengan *fuzzy number* yang diaproksimasi secara keseluruhan, sedangkan saat dievaluasi di  $\alpha^* = 0,9$ , dapat dilihat akurasi TFN untuk nilai-nilai yang lebih dapat dipercaya. Sebagai contoh, formula untuk rata-rata berbobot dari galat pendekatan SA adalah sebagai berikut,

$$\underline{wae^S}(\alpha^*) = \frac{\int_{\alpha^*}^1 \alpha \cdot \underline{e^S}(\alpha) d\alpha}{\int_{\alpha^*}^1 \alpha d\alpha} \quad (4.4)$$

$$\overline{wae^S}(\alpha^*) = \frac{\int_{\alpha^*}^1 \alpha \cdot e^S(\alpha) d\alpha}{\int_{\alpha^*}^1 \alpha d\alpha} \quad (4.5)$$

Untuk kalkulasi integral, akan digunakan metode Simpson seperti yang dijelaskan pada subbab 2.6 dengan partisi sebanyak 10. Formula rata-rata galat berbobot dari pendekatan lainnya juga serupa dan hanya perlu mengganti indikator  $S$  pada formula dengan  $G$  untuk GA dan  $EI$  untuk EIA. Hasil rata-rata galat berbobot dari tiga metode aproksimasi untuk nilai  $\alpha^* = 0$  dan  $\alpha^* = 0,9$  ditampilkan pada Tabel 4.6 berikut,

Tabel 4.6: Rata-rata galat berbobot dari tiga metode aproksimasi untuk interval tingkat keanggotaan 0 hingga 1 dan 0,9 hingga 1

$\alpha^*$	SA		GA		EIA	
	$\underline{wae^S}(\alpha^*)$	$\overline{wae^S}(\alpha^*)$	$\underline{wae^G}(\alpha^*)$	$\overline{wae^G}(\alpha^*)$	$\underline{wae^{EI}}(\alpha^*)$	$\overline{wae^{EI}}(\alpha^*)$
0	1,019%	1,812%	1,244%	1,403%	0,663%	0,651%
0,9	0,086%	0,226%	0,005%	0,010%	0,750%	0,630%

Pada Tabel 4.6 di atas, dapat dilihat bahwa pada nilai  $\alpha^* = 0$ , metode EIA memberikan aproksimasi yang paling akurat, sedangkan metode SA dan GA memberikan galat yang lebih besar. Di sisi lain, pada nilai  $\alpha^* = 0,9$ , dapat dilihat bahwa metode GA memberikan nilai yang paling akurat, sedangkan metode EIA memberikan galat yang lebih besar dari kedua metode lainnya. Hal ini menunjukkan metode EIA lebih baik untuk aproksimasi secara keseluruhan, akan tetapi metode GA sangat baik dan memiliki galat yang sangat kecil untuk nilai-nilai yang lebih dipercaya.

## 2) Kriteria 2 : Kesesuaian nilai yang lebih dipercaya

Untuk kriteria ini, diharapkan nilai galat semakin kecil saat tingkat nilai harga *life settlement* memiliki tingkat keanggotaan yang lebih tinggi, atau dengan kata lain saat nilainya lebih dipercaya maka hasil aproksimasi semakin sesuai. Untuk menilai hal tersebut, akan dilihat hubungan antara galat  $\underline{e}(\alpha)$  dan  $\overline{e}(\alpha)$  dengan tingkat keanggotaannya masing-masing,  $\alpha$ . Hubungan tersebut akan dilihat menggunakan korelasi peringkat Spearman atau yang akan disingkat sebagai korelasi Spearman, yaitu  $\rho(\alpha, \underline{e}(\alpha))$  dan  $\rho(\alpha, \overline{e}(\alpha))$ . Korelasi Spearman memiliki formula sebagai

berikut,

$$\rho(X, Y) = 1 - 6 \cdot \frac{\sum (R(X) - R(Y))^2}{n^3 - n} \quad (4.6)$$

$X$  dan  $Y$  melambangkan dua variabel yang ingin dilihat korelasinya, dan  $n$  melambangkan banyak sampel. Untuk menghitung korelasi Spearman tersebut, akan diurutkan terlebih dahulu nilai-nilai dari variabel  $X$  dan  $Y$  (Zar, 2005). Setelah itu akan dinotasikan peringkatnya sebagai  $R(X)$  dan  $R(Y)$  dengan 1 sebagai peringkat terendah dan  $n$  sebagai peringkat tertinggi. Nilai korelasi berada pada interval  $[-1, 1]$  dengan nilai korelasi 0 berarti peringkat variabel  $X$  tidak memiliki hubungan dengan peringkat variabel  $Y$ . Nilai korelasi positif berarti nilai peringkat variabel  $X$  cenderung meningkat saat peringkat variabel  $Y$  meningkat dengan nilai korelasi 1 menandakan korelasi sempurna yang berarti pemeringkatan variabel  $X$  sama persis dengan variabel  $Y$ . Di sisi lain, nilai korelasi negatif berarti nilai peringkat variabel  $X$  cenderung menurun saat peringkat variabel  $Y$  meningkat dengan nilai korelasi  $-1$  menandakan korelasi berlawanan sempurna yang berarti pemeringkatan variabel  $X$  terbalik dengan pemeringkatan variabel  $Y$  (Zar, 2005). Maka, metode yang lebih baik akan memiliki nilai korelasi negatif yang lebih dekat ke nilai  $-1$ .

Pada penelitian ini, karena ingin dilihat korelasi antara tingkat keanggotaan dengan galatnya, maka  $X$  yang akan digunakan adalah tingkat keanggotaan dan  $Y$ -nya adalah galatnya. Sebagai sampel, akan digunakan informasi yang tersedia dari Tabel 4.4, yakni menggunakan sebelas tingkat keanggotaan beserta galatnya. Untuk menghitung korelasi Spearman tersebut, akan diurutkan terlebih dahulu nilai tingkat keanggotaan dan juga galatnya (Zar, 2005). Setelah itu akan dinotasikan peringkat nilai tingkat keanggotaan dan juga galatnya sebagai  $R(\alpha)$ ,  $R(\underline{e}(\alpha))$ ,  $R(\bar{e}(\alpha))$  dengan 1 sebagai peringkat terendah dan 11 sebagai peringkat tertinggi. Maka, berdasarkan informasi dari Tabel 4.4, peringkat dari masing-masing galat dan tingkat keanggotaannya adalah sebagai berikut,

Tabel 4.7: Peringkat Tingkat Keanggotaan dan Galat dari Tingkat Keanggotaan 0 Hingga 1 untuk Metode SA, GA, dan EIA

$\alpha$	$R(\alpha)$	SA		GA		EIA	
		$R(\underline{e}^S(\alpha))$	$R(\overline{e}^S(\alpha))$	$R(\underline{e}^G(\alpha))$	$R(\overline{e}^G(\alpha))$	$R(\underline{e}^{EI}(\alpha))$	$R(\overline{e}^{EI}(\alpha))$
1	11	1	1	1	1	11	10
0,9	10	3	4	2	2	10	4
0,8	9	5	7	3	3	6	2
0,7	8	7	9	4	4	2	6
0,6	7	8	11	5	5	3	8
0,5	6	10	10	6	6	5	7
0,4	5	11	8	7	7	8	5
0,3	4	9	6	8	8	9	1
0,2	3	6	5	9	9	7	3
0,1	2	4	3	10	10	4	9
0	1	1	1	11	11	1	11

Sebagai contoh, apabila ingin dilihat korelasi antara tingkat keanggotaan dengan galat aproksimasi batas bawah harga *life settlement* dengan metode SA, maka formulanya sebagai berikut,

$$\rho(\alpha, \underline{e}^S(\alpha)) = 1 - 6 \cdot \frac{\sum (R(\alpha) - R(\underline{e}^S(\alpha)))^2}{11^3 - 11} \quad (4.7)$$

Formula korelasi untuk metode lainnya memiliki formula yang sama, hanya perlu mengganti indikator *S* menjadi *G* untuk metode GA dan menjadi *EI* untuk metode EIA.

Maka, didapat nilai korelasi Spearman antara tingkat keanggotaan dan galatnya dari tiga metode aproksimasi pada interval 0 hingga 1 sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, \underline{e}^S(\alpha)) &= 1 - 6 \cdot \frac{(11 - 1)^2 + (10 - 3)^2 + \dots + (2 - 4)^2 + (1 - 1)^2}{11^3 - 11} = -0,168 \\ \rho(\alpha, \overline{e}^S(\alpha)) &= 1 - 6 \cdot \frac{(11 - 1)^2 + (10 - 4)^2 + \dots + (2 - 3)^2 + (1 - 1)^2}{11^3 - 11} = 0,132 \\ \rho(\alpha, \underline{e}^G(\alpha)) &= 1 - 6 \cdot \frac{(11 - 1)^2 + (10 - 2)^2 + \dots + (2 - 10)^2 + (1 - 11)^2}{11^3 - 11} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\rho(\alpha, e^G(\alpha))} &= 1 - 6 \cdot \frac{(11 - 1)^2 + (10 - 2)^2 + \dots + (2 - 10)^2 + (1 - 11)^2}{11^3 - 11} = -1 \\ \overline{\rho(\alpha, e^{EI}(\alpha))} &= 1 - 6 \cdot \frac{(11 - 11)^2 + (10 - 10)^2 + \dots + (2 - 4)^2 + (1 - 1)^2}{11^3 - 11} = 0,473 \\ \overline{\rho(\alpha, e^{EI}(\alpha))} &= 1 - 6 \cdot \frac{(11 - 1)^2 + (10 - 4)^2 + \dots + (2 - 3)^2 + (1 - 1)^2}{11^3 - 11} = -0,136 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa pada interval tingkat keanggotaan dari 0 hingga 1, hanya metode GA yang memiliki korelasi berlawanan sempurna dengan nilai korelasi  $-1$ . Kedua metode lainnya memiliki nilai korelasi yang cukup kecil dan mendekati 0, selain korelasi antara  $\alpha$  dengan galat batas bawah aproksimasi metode EIA yang memiliki nilai 0,473. Dapat dilihat bahwa metode GA unggul dan dapat memberikan hasil yang sesuai yaitu nilai korelasi  $-1$ . Untuk membandingkan metode SA dan EIA lebih lanjut, akan dilihat korelasi Spearman antara tingkat keanggotaan dan galatnya pada interval tingkat keanggotaan 0,9 hingga 1.

Korelasi Spearman antara tingkat keanggotaan dan galatnya dari tiga metode aproksimasi pada interval tingkat keanggotaan 0,9 hingga 1 juga dapat diperoleh dengan cara sama dengan hasil sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, e^S(\alpha)) &= -1 \\ \overline{\rho(\alpha, e^S(\alpha))} &= -1 \\ \rho(\alpha, e^G(\alpha)) &= -1 \\ \overline{\rho(\alpha, e^G(\alpha))} &= -1 \\ \rho(\alpha, e^{EI}(\alpha)) &= 1 \\ \overline{\rho(\alpha, e^{EI}(\alpha))} &= 1 \end{aligned}$$

Pada korelasi antara tingkat keanggotaan dengan galat aproksimasi pada interval 0,9 hingga 1, dapat dilihat metode SA dan GA keduanya memiliki korelasi berlawanan sempurna dengan nilai korelasi  $-1$  sedangkan metode EIA memiliki metode korelasi sempurna dengan nilai korelasi 1. Korelasi negatif lebih baik karena semakin tinggi tingkat keanggotaannya (nilainya lebih dapat dipercaya), diharapkan memiliki galat yang lebih kecil (hasil aproksimasi semakin sesuai). Sedangkan nilai korelasi yang positif kurang baik karena berarti galatnya lebih besar untuk nilai-nilai yang lebih dipercaya. Maka, dapat disimpulkan untuk kriteria ini metode

GA memenuhi kriteria pada interval tingkat keanggotaan 0 hingga 1 maupun 0,9 hingga 1, metode SA memenuhi kriteria hanya pada interval 0,9 hingga 1, sedangkan metode EIA tidak memenuhi kriteria karena memiliki nilai galat yang semakin besar saat tingkat keanggotaan semakin mendekati 1.

### 3) Kriteria 3 : Tidak bias

Untuk kriteria ini, akan dianalisis nilai selisih dari hasil aproksimasi TFN harga *life settlement* dengan *fuzzy number* harga *life settlement* awalnya. Apabila selisihnya cenderung untuk memiliki tanda yang sama pada setiap tingkat keanggotaan, dapat dikatakan bahwa metode aproksimasi tersebut memiliki bias sistematis karena cenderung selalu mengestimasi terlalu tinggi atau selalu mengestimasi terlalu rendah (De Andrés-Sánchez dan Puchades, 2023). Untuk kriteria ini, lebih baik apabila hasil aproksimasi tidak memiliki bias sistematis untuk mengestimasi terlalu rendah maupun terlalu tinggi terhadap *fuzzy number* awalnya. Sebagai contoh, selisih antara harga dari *fuzzy number* awal dengan hasil aproksimasi dengan metode SA, dinotasikan  $\underline{\Delta}^S$  dan  $\overline{\Delta}^S$ , memiliki formula sebagai berikut,

$$\underline{\Delta}^S(\alpha) = \underline{PLS^S_x(\alpha)} - \underline{PLS_x(\alpha)} \quad (4.8)$$

$$\overline{\Delta}^S(\alpha) = \overline{PLS^S_x(\alpha)} - \overline{PLS_x(\alpha)} \quad (4.9)$$

Formula selisih dari pendekatan lainnya serupa dan hanya perlu mengganti indikator  $S$  pada formula dengan  $G$  untuk GA dan  $EI$  untuk EIA.

Hasil selisih dari tiga aproksimasi untuk berbagai tingkat keanggotaan disajikan dalam Tabel 4.8 berikut,

Tabel 4.8: Selisih antara hasil aproksimasi dari tiga metode aproksimasi dengan *fuzzy number* awal pada berbagai tingkat keanggotaan

$\alpha$	SA		GA		EIA	
	$\underline{\Delta^S}(\alpha)$	$\overline{\Delta^S}(\alpha)$	$\underline{\Delta^G}(\alpha)$	$\overline{\Delta^G}(\alpha)$	$\underline{\Delta^{EI}}(\alpha)$	$\overline{\Delta^{EI}}(\alpha)$
1	0,000	0,000	0,000	0,000	-5,730	-5,730
0,9	1,597	4,550	-0,195	-0,438	-3,557	-1,817
0,8	2,811	8,198	-0,772	-1,777	-1,766	1,196
0,7	3,654	10,908	-1,721	-4,055	-0,346	3,271
0,6	4,136	12,640	-3,031	-7,311	0,713	4,367
0,5	4,267	13,352	-4,691	-11,587	1,421	4,443
0,4	4,058	13,000	-6,692	-16,927	1,789	3,455
0,3	3,517	11,538	-9,024	-23,376	1,825	1,358
0,2	2,655	8,919	-11,677	-30,983	1,540	-1,897
0,1	1,480	5,091	-14,644	-39,799	0,942	-6,361
0	0,000	0,000	-17,915	-49,878	0,039	-12,087

Dapat dilihat bahwa metode SA dan GA memiliki bias sistematis karena metode SA memiliki selisih positif pada setiap tingkat keanggotaan yang menandakan metode SA memiliki bias untuk menghasilkan aproksimasi yang terlalu tinggi, sedangkan GA juga memiliki bias sistematis karena metode GA memiliki selisih negatif pada setiap tingkat keanggotaan yang menandakan metode GA memiliki bias untuk menghasilkan aproksimasi yang terlalu rendah. Di sisi lain, metode EIA tidak memiliki bias sistematis dan dapat memiliki nilai selisih yang positif maupun negatif, sehingga nilai aproksimasi terlalu tinggi dapat menutup nilai aproksimasi yang terlalu rendah. Hal ini dapat meminimalisir dampak galat perhitungan pada perhitungan lainnya.

#### 4) Kriteria 4 : Mempertahankan parameter

Untuk kriteria ini, diharapkan TFN hasil aproksimasi tetap mempertahankan setidaknya satu ciri-ciri dari *fuzzy number* asalnya,  $P\tilde{L}S_x$ . Metode SA mempertahankan nilai inti dan *support* dari *fuzzy number* asalnya, metode GA hanya mempertahankan nilai inti dari *fuzzy number* asalnya, sedangkan metode EIA mempertahankan *expected interval*-nya.

#### 5) Kriteria 5 : Interpretabilitas

Seperti yang telah dijelaskan pada subbab 2.2, bentuk segitiga dari hasil aproksimasi TFN memiliki interpretasi yang lebih mudah dibanding *fuzzy number* asalnya. Akan tetapi, selain itu, metode aproksimasi yang digunakan juga harus mudah dimengerti. Algoritma yang digunakan saat mengaproksimasi *fuzzy number* harga *life settlement* penting untuk mudah dimengerti dan diinterpretasikan oleh pihak-pihak yang terlibat dalam transaksi *life settlement* terlepas pengetahuan mereka dalam teori himpunan *fuzzy* maupun *fuzzy number* agar metode aproksimasi mudah digunakan pada praktiknya.

Metode SA didasarkan pada penilaian harga *life settlement* pada tiga skenario, yaitu skenario yang paling dapat dipercaya ( $\alpha=1$ ), skenario optimis  $\overline{PLS}_x(0)$ , dan skenario pesimis  $\underline{PLS}_x(0)$ . Mengevaluasi berbagai skenario tersebut merupakan hal yang umum dilakukan sehingga metode SA dapat dianggap intuitif untuk diaplikasikan. Metode GA juga mudah dimengerti oleh para broker dan investor tanpa perlu mempelajari *fuzzy number* karena hanya menggunakan skenario yang paling dapat dipercaya dan deviasinya dapat dihitung menggunakan ukuran durasi yang sering digunakan untuk aset keuangan lainnya. Di sisi lain, metode EIA memerlukan pengetahuan yang mendalam mengenai teori himpunan *fuzzy*, sehingga sulit untuk dipahami tanpa mempelajari mengenai konsep *fuzzy* terlebih dahulu.

#### 6) Kriteria 6 : Kemudahan untuk dihitung

Untuk kriteria ini, metode yang dianggap baik adalah metode yang mudah untuk dihitung. Metode yang memiliki solusi bentuk tertutup umumnya lebih menarik dibandingkan metode yang memerlukan metode numerik. Hal ini karena solusi dalam bentuk tertutup memberikan jawaban yang tepat dalam bentuk rumus matematis, yang dapat dianalisis, disederhanakan, atau digunakan kembali secara langsung. Sebaliknya, solusi numerik melibatkan perhitungan iteratif yang hanya mendekati jawaban dan sering membutuhkan lebih banyak sumber daya komputasi. Metode SA dan GA memiliki solusi bentuk tertutup dan formula yang singkat, sedangkan metode EIA memerlukan penurunan formula yang cukup panjang dan memerlukan bantuan metode numerik untuk mendapatkan solusinya.

Berikut ringkasan singkat mengenai hasil evaluasi keenam kriteria terhadap tiga metode aproksimasi TFN.

Tabel 4.9: Ringkasan hasil evaluasi keenam kriteria terhadap tiga metode aproksimasi TFN

Kriteria	SA	GA	EIA
Kriteria 1	Galat lebih buruk dari ketuda metode lainnya.	Galat terkecil untuk nilai-nilai yang lebih dipercaya.	Galat terkecil secara umum.
Kriteria 2	Nilai korelasi antara galat dan $\alpha$ bernilai $-1$ (baik) hanya pada interval $\alpha$ 0,9 hingga 1.	Nilai korelasi antara galat dan $\alpha$ bernilai $-1$ (baik) pada interval $\alpha$ 0 hingga 1 maupun 0,9 hingga 1.	Nilai korelasi antara galat dan $\alpha$ bernilai 1 (buruk) pada interval $\alpha$ 0,9 hingga 1.
Kriteria 3	Cenderung mengaproksimasi terlalu tinggi ( <i>overestimate</i> ).	Cenderung mengaproksimasi terlalu rendah ( <i>underestimate</i> ).	Tidak memiliki bias sistematis.
Kriteria 4	Mempertahankan inti dan <i>support</i> dari <i>fuzzy number</i> awal.	Hanya mempertahankan inti dari <i>fuzzy number</i> awal.	Mempertahankan <i>expected interval</i> dari <i>fuzzy number</i> awal.
Kriteria 5	Mudah diinterpretasikan dan intuitif, menggunakan skenario-skenario yang umum digunakan.	Menggunakan skenario yang umum digunakan dan ukuran durasi yang umum digunakan untuk aset keuangan lainnya.	Memerlukan pengetahuan mendalam mengenai teori <i>fuzzy</i> .
Kriteria 6	Sangat sederhana dan mudah dihitung.	Cukup mudah dihitung apabila ukuran durasi diketahui.	Memerlukan bantuan komputasi numerik untuk mendapatkan solusi.

## BAB 5 PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Proses penentuan harga *life settlement* telah dijelaskan langkah-langkahnya secara rinci pada bab 4. Berdasarkan informasi-informasi yang dimiliki, akan dihitung harga *life settlement* dengan TFN tingkat bunga dan *mortality multiplier*. Setelah itu, akan diubah informasi-informasi tingkat bunga dan *mortality multiplier* yang didapat menjadi TFN untuk memperhitungkan ketidakpastian. Harga *life settlement* dapat dihitung dengan menghitung selisih nilai sekarang dari pembayaran-pembayaran premi dengan nilai sekarang dari pembayaran manfaat pada saat pemegang polis ingin menjual polisnya. Terakhir, akan diaproksimasi *fuzzy number* harga *life settlement* menjadi TFN agar dapat diinterpretasikan lebih baik.
2. Pendekatan *secant* memiliki interpretasi yang sangat intuitif serta mempertahankan nilai inti dan *support* dari *fuzzy number* harga awalnya. Pendekatan *secant* juga paling mudah untuk diimplementasikan, hanya perlu nilai yang paling dipercaya, kasus terbaik, dan kasus terburuk. Di sisi lain, pendekatan *gradient* memberikan akurasi tertinggi untuk nilai-nilai yang lebih dapat dipercaya serta memiliki nilai galat yang semakin kecil seiring dengan meningkatnya tingkat keanggotaan. Secara interpretasi dan kalkulasi, pendekatan *gradient* juga cenderung masih sederhana dan hanya memerlukan sedikit kalkulasi. Pendekatan *expected interval* memberikan akurasi tertinggi secara umum, mempertahankan nilai *expected interval*-nya, serta tidak memiliki bias sistematis pada tingkat keanggotaan manapun.

### 5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk pengembangan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mempelajari lebih lanjut mengenai penentuan nilai *mortality multiplier* dan dampak perbedaan asumsi *mortality multiplier* terhadap hasil kinerja aproksimasi TFN.
2. Mempelajari lebih lanjut mengenai penentuan nilai tingkat bunga yang digunakan berdasarkan risiko-risiko transaksi *life settlement* seperti menggunakan regresi maupun regresi *fuzzy*.

3. Memodelkan nilai premi dan manfaat kematian yang tidak konstan atau bahkan memodelkannya dengan *fuzzy number* untuk memperhitungkan ketidakpastian terjadinya pembayaran premi maupun manfaat pada polis asuransi.

## DAFTAR REFERENSI

- AAJI - Glossary. (n.d.). <https://aaji.or.id/Home/Glossary>
- Aalaei, M. (2022). Pricing life settlements in the secondary market using fuzzy internal rate of return. *Journal of Mathematics and Modeling in Finance*, 2. doi: 10.22054/jmmf.2023.15186
- Abacus Life Settlements. (2022, March 10). Timeline of Life settlements — Abacus Life Settlements. Abacus Life Settlements — a Direct Buyer of Life Insurance Policies. <https://abacuslifesettlements.com/timeline-of-life-settlements/>
- Andrade, J. L., & Valencia, J. L. (2022). A fuzzy random survival forest for predicting lapses in insurance portfolios containing imprecise data. *Mathematics*, 11(1), 198. <https://doi.org/10.3390/math11010198>
- Atkinson, K., & Han, W. (2004). *Elementary Numerical analysis*. John Wiley & Sons.
- Ban, A. (2008). Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval. *Fuzzy Sets and Systems*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165011407004186>
- Bertsekas, D. P. (1982). Constrained optimization and lagrange multiplier methods. In *Elsevier eBooks*. <https://doi.org/10.1016/c2013-0-10366-2>
- Bhattacharya, J., Goldman, D. P., & Sood, N. (2004). Price regulation in secondary insurance markets. *the Journal of Risk and Insurance*. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.0022-4367.2004.00107.x>
- Bierwag, G., & Kaufman, G. G. (1985). Duration gap for financial institutions. *Financial Analysts Journal*. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.2469/faj.v41.n2.68>
- Braun, A., & Xu, J. (2020). Fair value measurement in the life settlement market. *the Journal of Fixed Income*. <https://www.pm-research.com/content/ijfixinc/29/4/100>
- Brockett, P. L., Chuang, S., Deng, Y., & MacMinn, R. D. (2013). Incorporating longevity risk and medical information into life settlement pricing. *the Journal of Risk and Insurance*. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1539-6975.2013.01522.x>
- Buckley, J. (1987). The fuzzy mathematics of finance. *Fuzzy Sets and Systems*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/016501148790128X>

- Buckley, J., & Qu, Y. (1990). On using  $\alpha$ -cuts to evaluate fuzzy equations. *Fuzzy Sets and Systems*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/016501149090204J>
- Calzi, M. L. (1990). Towards a general setting for the fuzzy mathematics of finance. *Fuzzy Sets and Systems*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/016501149090001M>
- Chattha, J. A., & Alhabshi, S. M. (2018). Benchmark rate risk, duration gap and stress testing in dual banking systems. *Pacific-Basin Finance Journal*, 62, 101063. <https://doi.org/10.1016/j.pacfin.2018.08.017>
- Cheng, C. (2004). Group opinion aggregation based on a grading process: A method for constructing triangular fuzzy numbers. *Computers & Mathematics With Applications*, 48(10–11), 1619–1632. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2004.03.008>
- De Andrés-Sánchez, J., & Puchades, L. G. (2021). Life settlements: descriptive analysis and quantitative aspects. *Cuadernos De Gestión*. <https://ojs.ehu.es/index.php/CG/article/view/22337>
- De Andrés-Sánchez, J., & Puchades, L. G. (2023). Life settlement pricing with fuzzy parameters. *Applied Soft Computing*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494623009420>
- Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2019). *Actuarial Mathematics for Life Contingent risks*. <https://doi.org/10.1017/9781108784184>
- Doherty, N. A., & Singer, H. J. (2003). The benefits of a secondary market for life insurance policies. *Social Science Research Network*. <http://fic.wharton.upenn.edu/fic/papers/02/0241.pdf>
- Dubois, D., & Prade, H. (1993). FUZZY NUMBERS: AN OVERVIEW. *Elsevier eBooks*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/B9781483214504500158>
- Dyatma, Y., Purnaba, I. G. P., & Sumarno, H. (2022). Cadangan Manfaat Minimum dan Maksimum Asuransi Jiwa Seumur Hidup dan Berjangka dengan Metode Prospektif. *Jurnal Matematika Integratif*, 18. <https://jurnal.unpad.ac.id/jmi/article/view/38478>
- Fajriani, A. N., Djuwandi, D., & Wilandari, Y. (2013). PERBANDINGAN NILAI TEBUS DAN CADANGAN PREMI PADA ASURANSI JIWA KONTINU. <http://eprints.undip.ac.id/38554/>

- Gatzert, N. (2010). The secondary market for life insurance in the United Kingdom, Germany, and the United States: comparison and Overview. *Risk Management and Insurance Review*. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1540-6296.2010.01187.x>
- Generali Indonesia. 2022. "Apakah Uang Polis Asuransi Bisa Kembali Lagi? Kenali Klaim Surrender." Diakses pada 21 Maret 2024, dari <https://www.generali.co.id/id/healthyliving/healthy-protection/apakah-uang-polis-asuransi-bisa-kembali-lagi-kenali-klaim-surrender>
- Grzegorzewski, P., & Mrówka, E. (2005). Trapezoidal approximations of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165011405000047>
- Harbor Life Settlements. (2021, June 28). History of Life settlements — Harbor Life Settlements. <https://www.harborlifeselements.com/history-of-life-settlements/>
- Indonesia. (2014). Undang-Undang Nomor 40 Tahun 2014 tentang Perasuransian. Diakses dari [https://www.ojk.go.id/Files/201506/1UU402014Perasuransian\\_1433758676.pdf](https://www.ojk.go.id/Files/201506/1UU402014Perasuransian_1433758676.pdf)
- Indonesia, B. (2024, November 20). *BI-Rate held at 6.00%: Maintaining stability, strengthening economic growth*. Diakses November 24, 2024, dari <https://www.bi.go.id/en/publikasi/ruang-media/news-release/Pages/sp.2625424.aspx>
- Jiménez, M., & Rivas, J. A. (1998). Fuzzy number approximation. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*. <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218488598000057>
- Kaufmann, A. (1986). Fuzzy Subsets Applications in O.R. and Management. In: Jones, A., Kaufmann, A., Zimmermann, HJ. (eds) *Fuzzy Sets Theory and Applications*. NATO ASI Series, vol 177. Springer, Dordrecht. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-4682-8\\_13](https://doi.org/10.1007/978-94-009-4682-8_13)
- Li, D. X. (1994). Immunization Measures for Life Contingencies. *4th AFIR International Colloquium*. <https://www.soa.org/library/research/actuarial-research-clearing-house/1990-99/1994/arch-1/arch94v121.pdf>
- LISA. (2024, May 7). *LISA releases 2023 Market Data Collection Survey results*. Diakses 22 Desember 2024, dari [https://www.lisa.org/blog\\_home.asp?Display=20](https://www.lisa.org/blog_home.asp?Display=20)

- Lubovich, J., Sabes, J., & Siegert, P. (2008). Introduction to methodologies used to price life insurance policies in life settlement transactions. *Social Science Research Network*. [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1567264](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1567264)
- Melinda, S. A. (2015). Penentuan Cash Surrender Value, Premium Loan, Paid Up Insurance dan Extended Term pada Kontrak Asuransi Jiwa. *Jurnal Matematika Unand*.
- PAI. (2024, March 26). *persatuan aktuaris indonesia*. Persatuan Aktuaris Indonesia. Diakses November 24, 2024, dari [https://www.aktuaris.or.id/page/news\\_detail/251/tabel-mortalitas-dan-morbiditas-penduduk-indonesia-tahun-2023-dari-bpjs-kesehatan](https://www.aktuaris.or.id/page/news_detail/251/tabel-mortalitas-dan-morbiditas-penduduk-indonesia-tahun-2023-dari-bpjs-kesehatan)
- Shapiro, A. F. (2004). Fuzzy logic in insurance. *Insurance. Mathematics & Economics*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167668704000903>
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999586590241X>
- Zar, J. H. (2005). Spearman Rank correlation. *Encyclopedia of Biostatistics*. <https://doi.org/10.1002/0470011815.b2a15150>
- Wang, W., Zhao, X.Q. (2004) An Epidemic Model in a Patchy Environment. *Mathematical Biosciences*. Hal 97–112.
- Zar, J. H. (2005). Spearman Rank correlation. *Encyclopedia of Biostatistics*. <https://doi.org/10.1002/0470011815.b2a15150>

# LAMPIRAN

## Lampiran 1

Berikut lampiran kode yang digunakan penulis dalam proses komputasinya.

```
#Install package dan path data
!pip install openpyxl
import pandas as pd
import math
import numpy as np
file_path = '/content/Data Mortality Table.xlsx'

#Input mortality multiplier
array_multiplier=[2.3,2.7,3.2,3.8,5]

#Distance Matrix
dist_mat = [[0 for _ in range(len(array_multiplier))] for _ in range(
    len(array_multiplier))]
for i in range (len(array_multiplier)):
    for j in range (len(array_multiplier)):
        dist_mat[i][j]=abs(array_multiplier[i]-array_multiplier[j])

#Mean Distance
dist_cap=[]
sum_row=0
for i in range (len(array_multiplier)):
    for j in range (len(array_multiplier)):
        sum_row=sum_row+dist_mat[i][j]
    dist_cap.append(sum_row/(len(array_multiplier)-1))
    sum_row=0

#Importance of each obv
p_mat = [[0 for _ in range(len(array_multiplier))] for _ in range(len(
    array_multiplier))]
for i in range (len(array_multiplier)):
    for j in range (len(array_multiplier)):
        p_mat[i][j]=dist_cap[j]/dist_cap[i]

#Importance degree, w
w=[]
sum_col=0
for l in range (len(array_multiplier)):
    for k in range (len(array_multiplier)):
        sum_col=sum_col+p_mat[k][l]
    w.append(1/sum_col)
```

```

sum_col=0

#multiplier_rate_1
multiplier_rate_1=0
for i in range (len(array_multiplier)):
    multiplier_rate_1=multiplier_rate_1+w[i]*array_multiplier[i]

#Average Deviation
stdev=0
for i in range (len(array_multiplier)):
    stdev=stdev+w[i]*abs(array_multiplier[i]-multiplier_rate_1)

#Ratio
wiai_left=0
wi_left=0
wiai_right=0
wi_right=0
for i in range (len(array_multiplier)):
    if array_multiplier[i]<multiplier_rate_1 :
        wiai_left=wiai_left+w[i]*array_multiplier[i]
        wi_left=wi_left+w[i]
    else :
        wiai_right=wiai_right+w[i]*array_multiplier[i]
        wi_right=wi_right+w[i]
weighted_left=wiai_left/wi_left
weighted_right=wiai_right/wi_right
ratio=(multiplier_rate_1-weighted_left)/(weighted_right-
    multiplier_rate_1)

#Left Deviation and Right Deviation
left_multiplier=(3*(1+ratio)*ratio*stdev)/(1+ratio**2)
right_multiplier=(3*(1+ratio)*stdev)/(1+ratio**2)

#Checker
sum=0
for i in range (len(array_multiplier)):
    sum=sum+w[i]

print(stdev)
print(multiplier_rate_1)
print(left_multiplier)
print(right_multiplier)

```

```

#Input Tingkat Bunga
array_interest=[0.10,0.12,0.15,0.17,0.21]

#Distance Matrix
dist_mat = [[0 for _ in range(len(array_interest))] for _ in range(len(
    array_interest))]
for i in range (len(array_interest)):
    for j in range (len(array_interest)):
        dist_mat[i][j]=abs(array_interest[i]-array_interest[j])

#Mean Distance
dist_cap=[]
sum_row=0
for i in range (len(array_interest)):
    for j in range (len(array_interest)):
        sum_row=sum_row+dist_mat[i][j]
    dist_cap.append(sum_row/(len(array_interest)-1))
    sum_row=0

#Importance of each obv
p_mat = [[0 for _ in range(len(array_interest))] for _ in range(len(
    array_interest))]
for i in range (len(array_interest)):
    for j in range (len(array_interest)):
        p_mat[i][j]=dist_cap[j]/dist_cap[i]

#Importance degree, w
w=[]
sum_col=0
for l in range (len(array_interest)):
    for k in range (len(array_interest)):
        sum_col=sum_col+p_mat[k][l]
    w.append(1/sum_col)
    sum_col=0

#Interest_rate_1
Interest_rate_1=0
for i in range (len(array_interest)):
    Interest_rate_1=Interest_rate_1+w[i]*array_interest[i]

#Average Deviation
stdev=0
for i in range (len(array_interest)):

```

```

    stdev=stdev+w[i]*abs(array_interest[i]-Interest_rate_1)

#Ratio
wiai_left=0
wi_left=0
wiai_right=0
wi_right=0
for i in range (len(array_interest)):
    if array_interest[i]<Interest_rate_1 :
        wiai_left=wiai_left+w[i]*array_interest[i]
        wi_left=wi_left+w[i]
    else :
        wiai_right=wiai_right+w[i]*array_interest[i]
        wi_right=wi_right+w[i]
weighted_left=wiai_left/wi_left
weighted_right=wiai_right/wi_right
ratio=(Interest_rate_1-weighted_left)/(weighted_right-Interest_rate_1)

#Left Deviation and Right Deviation
left_interest=(3*(1+ratio)*ratio*stdev)/(1+ratio**2)
right_interest=(3*(1+ratio)*stdev)/(1+ratio**2)

#Checker
sum=0
for i in range (len(array_interest)):
    sum=sum+w[i]

print(Interest_rate_1)
print(left_interest)
print(right_interest)

#Input data tabel mortalitas
#Pre-processing
df = pd.read_excel(file_path,sheet_name="Indo_2023")
df.loc[111,"qx"]=1
df["Age"]=df["Age"].astype(int)

#Input data dan variabel
Age_0=35 #Tahun beli polis
Age_1=65 #Tahun transaksi LS
Interest_rate_0=0.06 #Interest rate beli polis
Interest_rate_1=Interest_rate_1 #Interest rate LS

```

```

beta=multiplier_rate_1 #Mortality Multiplier
left_interest=left_interest
right_interest=right_interest
left_beta=left_multiplier
right_beta=right_multiplier
benefit=1000
alpha=0
df=df.drop(['ex','dx'],axis=1)
df['px']=1-df['qx']
df['mod_qx']=0
df['mod_qx']=df['mod_qx'].astype(float)
for i in range (len(df)) :
df.at[i,'mod_qx']=min(1,beta*df.at[i,'qx']) #qx*
df['mod_px']=1-df['mod_qx'] #px*
PV_prem=0
PV_benefit=0
PV_prem_PLS=0
PV_benefit_PLS=0
PV_prem_duration=0
PV_benefit_duration=0
PV_prem_DM=0
PV_benefit_DM=0

#Pre-processing data

filtered_df=df[df['Age']>=Age_0].copy()
filtered_df.loc[:,"tpx"]=0
filtered_df["tpx"]=filtered_df["tpx"].astype(float)
for i in range (len(filtered_df)) :
if filtered_df.at[i+Age_0,"Age"]==Age_0:
filtered_df.at[i+Age_0,"tpx"]=1
else:
filtered_df.at[i+Age_0,"tpx"]=filtered_df.at[i+Age_0-1,"tpx"]*
filtered_df.at[i+Age_0-1,"px"]
filtered_df.loc[:,"Dsc_benefit"]=0
filtered_df["Dsc_benefit"]=filtered_df["Dsc_benefit"].astype(float)
for i in range (len(filtered_df)) :
filtered_df.at[i+Age_0,"Dsc_benefit"]=(1+Interest_rate_0)**(-(i+1))*
filtered_df.at[i+Age_0,"qx"]*filtered_df.at[i+Age_0,"tpx"]
filtered_df.loc[:,"Dsc_premium"]=0
filtered_df["Dsc_premium"]=filtered_df["Dsc_premium"].astype(float)
for i in range (len(filtered_df)) :
filtered_df.at[i+Age_0,"Dsc_premium"]=(1+Interest_rate_0)**(-(i))*

```

```

    filtered_df.at[i+Age_0,"tpx"]
for i in range (len(filtered_df)):
PV_benefit += filtered_df.at[i+Age_0,"Dsc_benefit"]
PV_prem += filtered_df.at[i+Age_0,"Dsc_premium"]

#Calculate Premium
premium=benefit*PV_benefit/PV_prem

#To Calculate PLS
PLS_df=filtered_df[filtered_df['Age']>=Age_1].copy()
PLS_df.loc[:, "mod_tpx"]=0
PLS_df["mod_tpx"]=PLS_df["mod_tpx"].astype(float)
PLS_df.loc[:, "DM_frac"]=0
PLS_df["DM_frac"]=PLS_df["DM_frac"].astype(float)
for i in range (len(PLS_df)) :
if PLS_df.at[i+Age_1, "Age"]==Age_1:
PLS_df.at[i+Age_1, "mod_tpx"]=1
    else:
PLS_df.at[i+Age_1, "mod_tpx"]=PLS_df.at[i+Age_1-1, "mod_tpx"]*PLS_df.at[i
    +Age_1-1, "mod_px"]
for i in range (len(PLS_df)):
if PLS_df.at[i+Age_1, "Age"]==Age_1:
PLS_df.at[i+Age_1, "DM_frac"]=0
elif PLS_df.at[i+Age_1-1, "mod_px"]==0:
PLS_df.at[i+Age_1, "DM_frac"]=1.79e308
    else:
PLS_df.at[i+Age_1, "DM_frac"]=PLS_df.at[i+Age_1-1, "DM_frac"]+PLS_df.at[i
    +Age_1-1, "qx"]/PLS_df.at[i+Age_1-1, "mod_px"]
for i in range (len(PLS_df)):
if PLS_df.at[i+Age_1, "DM_frac"]>1.79e308:
PLS_df.at[i+Age_1, "DM_frac"]=1.79e308
    else:
PLS_df.at[i+Age_1, "DM_frac"]=PLS_df.at[i+Age_1, "DM_frac"]
PLS_df.loc[:, "Dsc_benefit"]=0
for i in range (len(PLS_df)) :
PLS_df.at[i+Age_1, "Dsc_benefit"]=(1+Interest_rate_1)**(-(i+1))*PLS_df.
    at[i+Age_1, "mod_qx"]*PLS_df.at[i+Age_1, "mod_tpx"]
PLS_df.loc[:, "Dsc_premium"]=0
for i in range (len(PLS_df)) :
    if i==len(PLS_df)-1:
PLS_df.at[i+Age_1, "Dsc_premium"]=0
    else :
PLS_df.at[i+Age_1, "Dsc_premium"]=(1+Interest_rate_1)**(-(i+1))*PLS_df.

```

```

    at[i+Age_1+1,"mod_tpx"]
#Gradient
PLS_df.loc[:,"DM_premium"]=0
PLS_df["DM_premium"] = PLS_df["DM_premium"].astype(float)
for i in range (len(PLS_df)) :
    if i==len(PLS_df)-1:
PLS_df.at[i+Age_1,"DM_premium"]=0
    else :
PLS_df.at[i+Age_1,"DM_premium"]=PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_premium"]*PLS_df
    .at[i+Age_1+1,"DM_frac"]*(-1)
PLS_df.loc[:,"DM_benefit"]=0
PLS_df["DM_benefit"] = PLS_df["DM_benefit"].astype(float)
for i in range (len(PLS_df)) :
PLS_df.at[i+Age_1,"DM_benefit"]=PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_benefit"]*(1/
    beta-PLS_df.at[i+Age_1,"DM_frac"])
for i in range (len(PLS_df)):
PV_benefit_PLS += PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_benefit"]
PV_prem_PLS += PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_premium"]
PV_prem_duration += PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_premium"]*(i+1)
PV_benefit_duration += PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_benefit"]*(i+1)
PV_prem_DM += PLS_df.at[i+Age_1,"DM_premium"]
PV_benefit_DM += PLS_df.at[i+Age_1,"DM_benefit"]
#Calculate PLS
PLS=benefit*PV_benefit_PLS-premium*PV_prem_PLS
Duration=(benefit*PV_benefit_duration-premium*PV_prem_duration)/PLS
DM=(benefit*PV_benefit_DM-premium*PV_prem_DM)/PLS
Left_Gradient=(DM*left_beta+Duration*right_interest/(1+Interest_rate_1)
    )*PLS
Right_Gradient=(DM*right_beta+Duration*left_interest/(1+Interest_rate_1
    ))*PLS

#To Calculate Left PLS with Alpha
def PLS_Left(alpha):
    PV_benefit_Left_PLS=0
    PV_prem_Left_PLS=0
    Left_PLS_df=PLS_df[PLS_df['Age']>=Age_1].copy()
    for i in range (len(Left_PLS_df)) :
Left_PLS_df.at[i+Age_1,'mod_qx']=min(1,(beta-left_beta*(1-alpha))*
    Left_PLS_df.at[i+Age_1,'qx'])
    Left_PLS_df['mod_px']=1-Left_PLS_df['mod_qx']
    Left_PLS_df.loc[:,"mod_tpx"]=0
    for i in range (len(Left_PLS_df)) :
if Left_PLS_df.at[i+Age_1,"Age"]==Age_1:

```

```

Left_PLS_df.at[i+Age_1,"mod_tpx"]=1
    else:
Left_PLS_df.at[i+Age_1,"mod_tpx"]=Left_PLS_df.at[i+Age_1-1,"mod_tpx"]*
    Left_PLS_df.at[i+Age_1-1,"mod_px"]
Left_PLS_df.loc[:, "Dsc_benefit"]=0
    for i in range (len(Left_PLS_df)) :
Left_PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_benefit"]=(1+Interest_rate_1+right_interest
    *(1-alpha)**(-(i+1))*Left_PLS_df.at[i+Age_1,"mod_qx"]*Left_PLS_df.
    at[i+Age_1,"mod_tpx"]
Left_PLS_df.loc[:, "Dsc_premium"]=0
    for i in range (len(Left_PLS_df)) :
        if i==len(Left_PLS_df)-1:
Left_PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_premium"]=0
        else :
Left_PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_premium"]=(1+Interest_rate_1+right_interest
    *(1-alpha)**(-(i+1))*Left_PLS_df.at[i+Age_1+1,"mod_tpx"]
    for i in range (len(Left_PLS_df)):
PV_benefit_Left_PLS += Left_PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_benefit"]
PV_prem_Left_PLS += Left_PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_premium"]
#Calculate Left PLS
Left_PLS=benefit*PV_benefit_Left_PLS-premium*PV_prem_Left_PLS
return Left_PLS

#To Calculate Right PLS with Alpha
def PLS_Right(alpha):
    PV_benefit_Right_PLS=0
    PV_prem_Right_PLS=0
    Right_PLS_df=PLS_df[PLS_df['Age']>=Age_1].copy()
    for i in range (len(Right_PLS_df)) :
Right_PLS_df.at[i+Age_1,'mod_qx']=min(1, (beta+right_beta*(1-alpha))*
    Right_PLS_df.at[i+Age_1,'qx'])
    Right_PLS_df['mod_px']=1-Right_PLS_df['mod_qx']
    Right_PLS_df.loc[:, "mod_tpx"]=0
    for i in range (len(Right_PLS_df)) :
if Right_PLS_df.at[i+Age_1,"Age"]==Age_1:
Right_PLS_df.at[i+Age_1,"mod_tpx"]=1
        else:
Right_PLS_df.at[i+Age_1,"mod_tpx"]=Right_PLS_df.at[i+Age_1-1,"mod_tpx"]
    *Right_PLS_df.at[i+Age_1-1,"mod_px"]
    Right_PLS_df.loc[:, "Dsc_benefit"]=0
    for i in range (len(Right_PLS_df)) :
Right_PLS_df.at[i+Age_1,"Dsc_benefit"]=(1+Interest_rate_1-left_interest
    *(1-alpha)**(-(i+1))*Right_PLS_df.at[i+Age_1,"mod_qx"]*

```

```

    Right_PLS_df.at[i+Age_1, "mod_tpx"]
    Right_PLS_df.loc[:, "Dsc_premium"]=0
    for i in range (len(Right_PLS_df)) :
        if i==len(Right_PLS_df)-1:
Right_PLS_df.at[i+Age_1, "Dsc_premium"]=0
        else :
Right_PLS_df.at[i+Age_1, "Dsc_premium"]=(1+Interest_rate_1-left_interest
        *(1-alpha)**(-(i+1))*Right_PLS_df.at[i+Age_1+1, "mod_tpx"]
    for i in range (len(Right_PLS_df)):
PV_benefit_Right_PLS += Right_PLS_df.at[i+Age_1, "Dsc_benefit"]
PV_prem_Right_PLS += Right_PLS_df.at[i+Age_1, "Dsc_premium"]

    #Calculate Right PLS
    Right_PLS=benefit*PV_benefit_Right_PLS-premium*PV_prem_Right_PLS
    return(Right_PLS)

#Expected Interval
def Simpson01(fungsi):
    return 1/30*(fungsi(0)+4*fungsi(0.1)+2*fungsi(0.2)+4*fungsi(0.3)+2*
        fungsi(0.4)+4*fungsi(0.5)+2*fungsi(0.6)+4*fungsi(0.7)+2*fungsi(0.8)
        +4*fungsi(0.9)+fungsi(1))

def Simpson91(fungsi):
    return 1/30*(fungsi(0.9)+4*fungsi(0.91)+2*fungsi(0.92)+4*fungsi(0.93)
        +2*fungsi(0.94)+4*fungsi(0.95)+2*fungsi(0.96)+4*fungsi(0.97)+2*
        fungsi(0.98)+4*fungsi(0.99)+fungsi(1))

def AlphaSimpson01(fungsi):
    return 1/30*(0*fungsi(0)+4*0.1*fungsi(0.1)+2*0.2*fungsi(0.2)+4*0.3*
        fungsi(0.3)+2*0.4*fungsi(0.4)+4*0.5*fungsi(0.5)+2*0.6*fungsi(0.6)
        +4*0.7*fungsi(0.7)+2*0.8*fungsi(0.8)+4*0.9*fungsi(0.9)+fungsi(1))

def AlphaSimpson91(fungsi):
    return 1/30*(0*fungsi(0.9)+4*0.1*fungsi(0.91)+2*0.2*fungsi(0.92)
        +4*0.3*fungsi(0.93)+2*0.4*fungsi(0.94)+4*0.5*fungsi(0.95)+2*0.6*
        fungsi(0.96)+4*0.7*fungsi(0.97)+2*0.8*fungsi(0.98)+4*0.9*fungsi
        (0.99)+fungsi(1))

def LeftApproxEI(alpha):
    return Inti_EI-(1-alpha)*Left_EI

def RightApproxEI(alpha):
    return Inti_EI+(1-alpha)*Right_EI

```

```

def LeftApproxSecant(alpha):
    return PLS-(1-alpha)*Left_Secant

def RightApproxSecant(alpha):
    return PLS+(1-alpha)*Right_Secant

def LeftApproxGradient(alpha):
    return PLS-(1-alpha)*Left_Gradient

def RightApproxGradient(alpha):
    return PLS+(1-alpha)*Right_Gradient

def LeftEIError(alpha):
    return abs(PLS_Left(alpha)-LeftApproxEI(alpha))/PLS_Left(alpha)

def RightEIError(alpha):
    return abs(PLS_Right(alpha)-RightApproxEI(alpha))/PLS_Right(alpha)

def LeftSecantError(alpha):
    return abs(PLS_Left(alpha)-LeftApproxSecant(alpha))/PLS_Left(alpha)

def RightSecantError(alpha):
    return abs(PLS_Right(alpha)-RightApproxSecant(alpha))/PLS_Right(alpha)
)

def LeftGradientError(alpha):
    return abs(PLS_Left(alpha)-LeftApproxGradient(alpha))/PLS_Left(alpha)

def RightGradientError(alpha):
    return abs(PLS_Right(alpha)-RightApproxGradient(alpha))/PLS_Right(alpha)

Left_Secant=PLS-PLS_Left(0)
Right_Secant=PLS_Right(0)-PLS
Inti_EI=3*AlphaSimpson01(PLS_Right)+3*AlphaSimpson01(PLS_Left)-
    Simpson01(PLS_Right)-Simpson01(PLS_Left)
Left_EI=-4*Simpson01(PLS_Left)-2*Simpson01(PLS_Right)+6*AlphaSimpson01(
    PLS_Left)+6*AlphaSimpson01(PLS_Right)
Right_EI=2*Simpson01(PLS_Left)+4*Simpson01(PLS_Right)-6*AlphaSimpson01(
    PLS_Left)-6*AlphaSimpson01(PLS_Right)

print("Error Left EI",LeftEIError(1)*100,"%")

```

```

print("Error Left Secant", LeftSecantError(1)*100, "%")
print("Error Left Gradient", LeftGradientError(1)*100, "%")
#hitung error, PLS aproksimasi, wae, dll

print(premium)
print(PLS)

print("Inti EI", Inti_EI)
print("Left EI", Left_EI)
print("Right EI", Right_EI)

print("Left Gradient", Left_Gradient)
print("Right Gradient", Right_Gradient)

print("Left Secant", Left_Secant)
print("Right Secant", Right_Secant)

#Print tabel hasil
tabel=[]
for i in range (11):
    tbl=[]
    tbl.append(1-i/10)
    tbl.append(LeftApproxSecant(1-i/10))
    tbl.append(RightApproxSecant(1-i/10))
    tbl.append(LeftApproxGradient(1-i/10))
    tbl.append(RightApproxGradient(1-i/10))
    tbl.append(LeftApproxEI(1-i/10))
    tbl.append(RightApproxEI(1-i/10))
    tabel.append(tbl)
matriks=np.round(tabel,3)
tabel=[]
for i in range (11):
    tbl=[]
    tbl.append(1-i/10)
    tbl.append(LeftApproxSecant(1-i/10)-PLS_Left(1-i/10))
    tbl.append(RightApproxSecant(1-i/10)-PLS_Right(1-i/10))
    tbl.append(LeftApproxGradient(1-i/10)-PLS_Left(1-i/10))
    tbl.append(RightApproxGradient(1-i/10)-PLS_Right(1-i/10))
    tbl.append(LeftApproxEI(1-i/10)-PLS_Left(1-i/10))
    tbl.append(RightApproxEI(1-i/10)-PLS_Right(1-i/10))
    tabel.append(tbl)
matriks=np.round(tabel,3)

```

```

np.set_printoptions(suppress=True, precision=10)
print(matriks)

#Print tabel galat/error
tabel=[]
def ErrorLeftSecant(alpha):
    return abs(PLS_Left(alpha)-LeftApproxSecant(alpha))/PLS_Left(alpha)
def ErrorRightSecant(alpha):
    return abs(PLS_Right(alpha)-RightApproxSecant(alpha))/PLS_Right(alpha)
def ErrorLeftGradient(alpha):
    return abs(PLS_Left(alpha)-LeftApproxGradient(alpha))/PLS_Left(alpha)
def ErrorRightGradient(alpha):
    return abs(PLS_Right(alpha)-RightApproxGradient(alpha))/PLS_Right(alpha)
def ErrorLeftEI(alpha):
    return abs(PLS_Left(alpha)-LeftApproxEI(alpha))/PLS_Left(alpha)
def ErrorRightEI(alpha):
    return abs(PLS_Right(alpha)-RightApproxEI(alpha))/PLS_Right(alpha)
for i in range(11):
    tbl=[]
    tbl.append(1-i/10)
    tbl.append(ErrorLeftSecant(1-i/10)*100)
    tbl.append(ErrorRightSecant(1-i/10)*100)
    tbl.append(ErrorLeftGradient(1-i/10)*100)
    tbl.append(ErrorRightGradient(1-i/10)*100)
    tbl.append(ErrorLeftEI(1-i/10)*100)
    tbl.append(ErrorRightEI(1-i/10)*100)
    tabel.append(tbl)
matriks=np.round(tabel,3)
tabel=[]
for i in range(11):
    tbl=[]
    tbl.append(1-i/100)
    tbl.append(ErrorLeftSecant(1-i/100)*100)
    tbl.append(ErrorRightSecant(1-i/100)*100)
    tbl.append(ErrorLeftGradient(1-i/100)*100)
    tbl.append(ErrorRightGradient(1-i/100)*100)
    tbl.append(ErrorLeftEI(1-i/100)*100)
    tbl.append(ErrorRightEI(1-i/100)*100)
    tabel.append(tbl)
matriks=np.round(tabel,3)

```

```

np.set_printoptions(suppress=True, precision=10)
print(matriks)

#Menghitung wae, weighted average error
def alpha(alpha):
    return alpha

def wae0(method):
    return AlphaSimpson01(method)/Simpson01(alpha)*100

def wae9(method):
    return AlphaSimpson91(method)/Simpson91(alpha)*100

tabel=[]
tabel1=[wae0(ErrorLeftSecant),wae0(ErrorRightSecant),wae0(
    ErrorLeftGradient),wae0(ErrorRightGradient),wae0(ErrorLeftEI),wae0(
    ErrorRightEI)]
tabel2=[wae9(ErrorLeftSecant),wae9(ErrorRightSecant),wae9(
    ErrorLeftGradient),wae9(ErrorRightGradient),wae9(ErrorLeftEI),wae9(
    ErrorRightEI)]
tabel.append(tabel1)
tabel.append(tabel2)
tabel=np.array(tabel)
print(tabel)

#Mengubah data galat dan tingkat keanggotaan menjadi rank untuk
    menghitung Krrelasi Spearman
import numpy as np
from scipy.stats import rankdata

# Rank each column independently
ranks = np.apply_along_axis(rankdata, axis=0, arr=matriks)

# Print the original data and the ranks
print("Original Data:")
print(matriks)
print("\nRanks by Column:")
print(ranks)

```